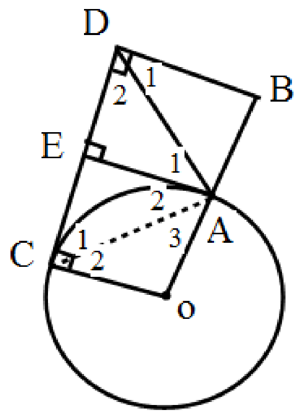
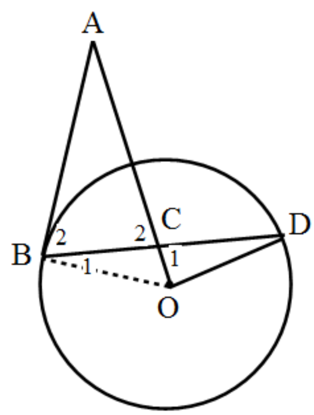
۱۲۵. گزینه‌ی ۳.

از تساوی $OA = AB$ و موازی بودن خطوط OC ، AE و BD نتیجه می‌شود که $CE = ED$ بنابراین $AD = AC$ پس AE نیمساز زاویه‌ی DAC است و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$. همچنین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = ۳۴$ از طرفی $\hat{C}_1 = ۵۶^\circ$ پس $\hat{A}_3 = \hat{C}_2 = ۳۴^\circ$
بنابراین: $D\hat{A}C = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = ۳ \times ۳۴ = ۱۰۲^\circ$.



۱۲۶. گزینه‌ی ۲.

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = ۹۰ \overset{\hat{B}_2 = \hat{C}_2}{\Rightarrow} \hat{B}_1 + \hat{C}_2 = ۹۰ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = ۹۰ \overset{\hat{B}_1 = \hat{D}}{\Rightarrow} \hat{D} + \hat{C}_1 = ۹۰ \Rightarrow O\hat{C}D = ۹۰^\circ$$



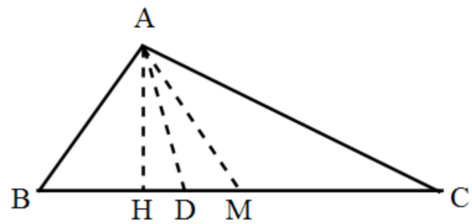
۱۲۷. گزینه‌ی ۳.

بدون آن‌که از کلیت مساله کاسته شود فرض می‌کنیم N وسط MC است در نتیجه $\frac{۱}{۲} = \frac{MN}{MB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB = ۲AD$
از طرفی $AB = \frac{۲}{۳}AC$ بنابراین $۲AD = \frac{۲}{۳}AC$ و $\frac{AD}{AC} = \frac{۱}{۳}$ پس:

$$\frac{AD}{۲AE} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{۲}{۳}$$

۱۲۸. گزینه‌ی ۴.

در هر مثلث اگر $AB < AC$ اگر آنگاه D (پای نیمساز) بین M و H است.(M پای میانه و H پای ارتفاع است.)
در نتیجه AM و AD دو مایل نسبت به عمود AH اند و مایلی بزرگتر است که پای آن از پای عمود دورتر باشد پس $AD < AM$.

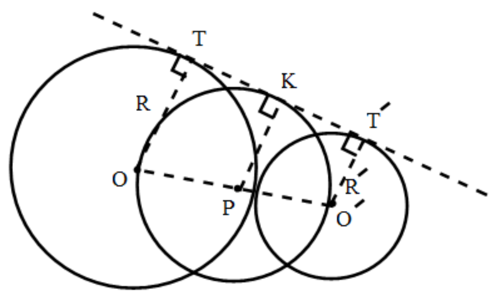


۱۲۹. گزینه‌ی ۲.

فرض کنیم P وسط OO' باشد. $OO' = R + R'$ و سه پاره‌خط OT ، PK و $O'T'$ موازی‌اند بنابراین:

$$PK = \frac{۱}{۲}(OT + O'T') = \frac{R+R'}{۲} = R''$$

از طرفی PK فاصله‌ی مرکز دایره از خط مماس مشترک است پس این دایره بر خط مماس مشترک دو دایره‌ی قبل مماس است.



۱۳۰. گزینه‌ی ۱.

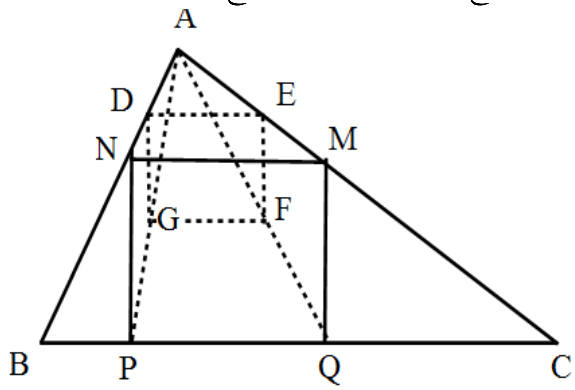
چون AD نیمساز زاویه‌ی A است پس: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

$$\begin{cases} BB' \times BA = BD \times BM \\ CC' \times CA = CM \times CD \end{cases} \Rightarrow \frac{BB' \times BA}{CC' \times CA} = \frac{BD \times BM}{CM \times CD} \Rightarrow \frac{BB'}{CC'} \times \frac{BA}{CA} = \frac{BD \times BM}{CM \times CD} \Rightarrow \frac{BB'}{CC'} \times \frac{DB}{DC} = \frac{DB}{DC} \times \frac{BM}{CM}$$

بنابراین: $\frac{BB'}{CC'} = ۱$.

۱۳۱. گزینه‌ی ۴.

مربع دلخواه $DEFG$ را طوری رسم می‌کنیم که DE موازی BC و D و E روی دو ضلع باشند. از A به G و F وصل می‌کنیم تا P و Q به‌دست آید. مربع $PNMQ$ مجانس مربع $DEFG$ با مرکز A است.



۱۳۲. گزینه‌ی ۴.

یک صفحه موازی صفحه BCD است و سه صفحه‌ی دیگر صفحه‌هایی هستند که از نقطه‌ی A و دو نقطه‌ی وسط اضلاع مثلث می‌گذرند.

۱۳۳. گزینه‌ی ۱.

$$\vec{AM}=\frac{۲}{۳}\vec{AB}\Rightarrow \vec{OM}-\vec{OA}=\frac{۲}{۳}(\vec{OB}-\vec{OA})$$

$$\vec{OM}=\frac{۲}{۳}\vec{OB}+\frac{۱}{۳}\vec{OA}=\frac{۱}{۳}(۲\vec{OB}+\vec{OA})=\frac{۱}{۳}[(-۲,۴,۸)-(۵,-۴,۱)]=(۱,۰,۳)$$

$$\Rightarrow\left|\vec{OM}\right|=\sqrt{۱+۰+۹}=\sqrt{۱۰}$$

۱۳۴. گزینه‌ی ۲.

دو خط موازی‌اند و بردار هادی آن‌ها $l=(۲,۱,-۱)$ است. نقاط $A=(۱,-۲,۰)$ و $B=(۱,۰,۲)$ را به ترتیب روی دو خط در نظر می‌گیریم بنابراین $\vec{AB}=(۰,۲,۲)$.

$$\vec{AB}\times l=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & -۱\end{vmatrix}=(-۴,۴,-۴)\ \Rightarrow\ h=\frac{\left|\vec{AB}\times l\right|}{|l|}=\frac{\sqrt{۱۶+۱۶+۱۶}}{\sqrt{۴+۱+۱}}=\frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}}=۲\sqrt{۲}$$

۱۳۵. گزینه‌ی ۴.

نقطه‌ی $B=(۰,۳,۰)$ و بردار نرمال صفحه $\vec{l}=(۲,۳,-۱)$ است. نقطه‌ی $A=(-۱,۰,۲)$ را روی صفحه در نظرمی‌گیریم بنابراین $\overrightarrow{AB}=(۱,۳-۲)$ و $N=\overrightarrow{AB}\times l=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۱ & ۳ & -۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \end{vmatrix}=(۳,-۳,-۳)$. می‌توان بردار نرمال صفحه‌ی مورد نظر را $N=(۱,-۱,-۱)$ در نظر گرفت پس معادله‌ی این صفحه به‌صورت $x-y-z=d$ است که با جایگذاری مختصات نقطه‌ی $B=(۰,۳,۰)$ در آن مقدار $d=-۳$ محاسبه می‌شود. برای تقاطع این صفحه با محور Z ، در معادله‌ی صفحه $x=y=۰$ جایگزین می‌کنیم که $z=۳$ حاصل می‌شود.

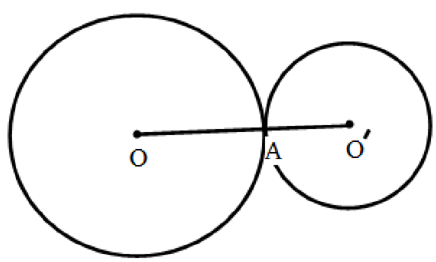
۱۳۶. گزینه‌ی ۱.

از این‌که قائم‌های وارد بر دایره‌ی C همه از نقطه‌ی $(۲,-۳)$ می‌گذرند نتیجه می‌شود که مرکز دایره‌ی C نقطه‌ی $O=(۲,-۳)$ است. شیب خط OA برابر $m=-۲$ و معادله‌ی آن $y=-۲x+۱$ است بنابراین مختصات نقطه‌ی O' به‌صورت $O'=(\alpha\ ,-۲\alpha+۱)$ است.

$$|O'A|=\sqrt{۵}\Rightarrow(۰-\alpha)^۲+(-۲\alpha+۱-۱)^۲=۵\Rightarrow\alpha^۲=۱\Rightarrow\alpha=\pm۱$$

اگر $\alpha=۱$ آن‌گاه $O'=(۱\ ,-۱)$ که در این‌صورت دو دایره مماس درونی می‌شوند. بنابراین مقدار $\alpha=۱$ قابل قبول نیست.

اگر $\alpha=-۱$ آن‌گاه $O'=(-۱\ ,۳)$ که در این‌صورت دو دایره مماس بیرونی می‌شوند. بنابراین مقدار $\alpha=-۱$ قابل قبول است.



۱۳۷. گزینه‌ی ۲.

سهمی افقی است و $F=(\alpha+a\ ,\beta)=(۳,۲)$ بنابراین $a=۲\ ,\ \alpha=۱$ و $x=\alpha-a=-۱$ پس داریم:

$$(y-\beta)^۲=۴a(x-\alpha)\ \Rightarrow\ (y-۲)^۲=۸(x-۱)\ \overset{y=۰}{\Rightarrow}\ x=\frac{۳}{۲}\qquad\Rightarrow\quad A=(\frac{۳}{۲},۰)\ \Rightarrow\ AF=\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}=۲/۵$$

۱۳۸. گزینه‌ی ۲.

$$\tan ۲\theta = \frac{۲۴}{۵+۲} = \frac{۲۴}{۷} \Rightarrow \tan ۲\theta = \frac{۲\tan\theta}{۱-\tan^۲\theta} = \frac{۲۴}{۷} \Rightarrow ۱۲\tan^۲\theta + ۷\tan\theta - ۱۲ = ۰$$

بنابراین:

$$\tan\theta = \frac{-۷ \pm \sqrt{۶۲۵}}{۲۴} = \begin{cases} \frac{۳}{۴} \\ \frac{-۴}{۳} \end{cases}$$

مقدار $\tan\theta = \frac{-۴}{۳}$ قابل قبول نیست و جواب $\tan\theta = \frac{۳}{۴}$ است.

۱۳۹. گزینه‌ی ۴.

$$A = [a_{ij}]_{۲\times۳} \quad , \quad B = [b_{ij}]_{۴\times۳} \Rightarrow B^T = [b'_{ij}]_{۳\times۴} \Rightarrow AB^T = C = [c_{ij}]_{۲\times۴}$$

۱۴۰. گزینه‌ی ۳.

چون A بالا مثلثی است پس $A^{-۱}$ نیز بالا مثلثی است.

$$A^{-۱} = [b_{ij}] \Rightarrow b_{۳۲} = ۰ \quad , \quad |A| = ۶$$

$$b_{ij} = \frac{۱}{|A|}|A_{ji}| \Rightarrow b_{۲۲} = \frac{۱}{۶}(-۱)^۴\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad b_{۱۲} = \frac{۱}{۶}(-۱)^۳\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{vmatrix} = \frac{۱}{۲}$$

و جمع درایه‌ها برابر $b_{۱۲} + b_{۲۲} + b_{۳۲} = ۱$ است.

۱۴۱. گزینه‌ی ۳.

فراوانی	مرکز دسته	دسته
۹	۲۴	[۲۲/۵ − ۲۵/۵)
۱۱	۲۷	[۲۵/۵ − ۲۸/۵)
۱۱ → ۱۳	۳۰	[۲۸/۵ − ۳۱/۵)
۱۰ → ۱۱	۳۳	[۳۱/۵ − ۳۴/۵)
۸	۳۶	[۳۴/۵ − ۳۷/۵)

درصد فراوانی نسبی به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\frac{۱۳}{۹+۱۱+۱۳+۱۱+۸} = \frac{۱۳}{۵۲} = \%۲۵$$

۱۴۲. گزینه‌ی ۳.

$$\bar{x} = ۱۶$$
$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{۵\times۱۲+۷\times۱۴+۱۶\times۱۰+۱۸a+۲۰\times۳}{۵+۷+۱۰+a+۳} = ۱۶$$

در نتیجه

$$۳۷۸ + ۱۸a = ۴۰۰ + ۱۶a \Rightarrow a = ۱۱$$
$$\sigma^۲ = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^۲}{\sum f_i} = \frac{۵(۱۲-۱۶)^۲+۷(۱۴-۱۶)^۲+۱۱(۱۸-۱۶)^۲+۳(۲۰-۱۶)^۲}{۳۶}$$
$$= \frac{۲۰۰}{۳۶} = ۵/۵۵$$

۱۴۳. گزینه‌ی ۱.

$n! > ۲^{n+۱}$
$m = ۵ \Rightarrow ۱۲۰ > ۲^۶ \Rightarrow ۱۲۰ > ۶۴ \checkmark$ شروع
فرض: $k! > ۲^{k+۱}$
حکم: $(k+۱)! > ۲^{k+۲} \Rightarrow k!(k+۱) > ۲^{k+۱}(k+۱) > ۲^{k+۲} \Rightarrow k+۱ > ۲$

۱۴۴. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{array}{r|l} ۱۱۵ & ۲۷ \\ \hline ۱۰۸ & ۴ \\ \hline ۷ & \end{array}$$

$۰,۱,۲,\dots,۲۶$

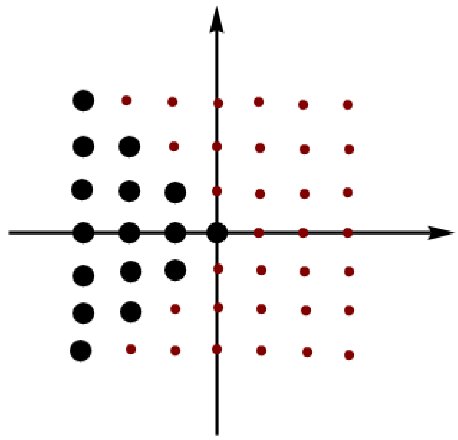
۴ سری پر می‌شود و ۷ تا باقی می‌ماند. پس حداقل ۵ عضو دارای یک باقیمانده هستند.

۱۴۵. گزینه‌ی ۲.

$$A_۱ = \{m \in \mathbf{Z} : |m| \le ۱, ۲^m \le ۲\} = \{m \in \mathbf{Z} : -۱ \le m \le ۱, ۲^m \le ۲\} = \{-۱,۰,۱\}$$
$$A_۴ = \{m \in \mathbf{Z} : |m| \le ۴, ۲^m \le ۸\} = \{-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$$
$$A_۶ = \{m \in \mathbf{Z} : |m| \le ۶, ۲^m \le ۱۲\} = \{-۶,-۵,-۴,\dots,۰,۱,۲,۳\}$$
$$A_۶ - A_۴ = \{-۶,-۵\}$$
$$(A_۶ - A_۴)\cup A_۱ = \{-۶,-۵,-۱,۰,۱\}$$

بنابراین تعداد اعضا ۵ تا است.

۱۴۶. گزینه‌ی ۳ .
در شکل زیر اعضای رابطه‌ی R با نقاط پر رنگ نشان داده شده‌اند. تعداد اعضای این رابطه ۱۶ تا است.



۱۴۷. گزینه‌ی ۱.

فرد	۱,۳,۵
زوج	۲,۴,۶

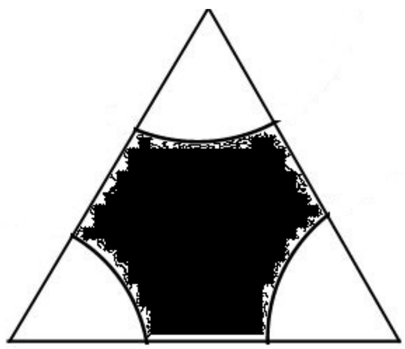
ششمی	پنجمی	چهارمی	سومی	دومی	اولی
زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$

$$\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{20}$$

چون با شروع از اعداد زوج نیز همین عدد حاصل می‌شود، در نهایت جواب برابر $\frac{1}{20}\times 2=$ ۰/۱ است.

۱۴۸. گزینه‌ی ۳.

مساحت کل مثلث برابر $\frac{۳\pi}{۲} = ۲\pi\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ و مساحت ناحیه‌ی هاشور خورده $\pi = \frac{\pi}{۲} - \frac{۳\pi}{۲}$ است که نسبت این‌دو برابر $\frac{۲}{۳} = \frac{\pi}{\frac{۳\pi}{۲}}$ می‌شود.



۱۴۹. گزینه‌ی ۱.

$$\binom{۵}{۵}\frac{(۵-۱)!}{۲} = ۱۲$$

۱۵۰. گزینه‌ی ۲.

$$\begin{cases} a \overset{۱۱}{\equiv} ۰ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۲۱ \\ a \overset{۴}{\equiv} ۱ \overset{۴}{\equiv} ۱۲۱ \\ a \overset{۵}{\equiv} ۱ \overset{۵}{\equiv} ۱۲۱ \end{cases} \Rightarrow a \overset{۲۲۰}{\equiv} ۱۲۱ \Rightarrow a \overset{۲۲۰}{\equiv} ۱۲۱ \overset{۲۲۰}{\equiv} ۳۴۱ \overset{۲۲۰}{\equiv} ۵۶۱ \overset{۲۲۰}{\equiv} ۷۸۱$$

۱۵۱. گزینه‌ی ۲.

$$a + b = ۲۷۷۲ \Rightarrow a'd + b'd = ۲۷۷۲ \ , \ d = ۲۳۱ \Rightarrow a' + b' = ۱۲$$

a'	۱	۲	۳	٤	۵
b'	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
	غیر قابل قبول چون در این‌صورت $a = a'd = d$	غیر قابل قبول چون $(a', b') = ۲$	غیر قابل قبول چون $(a', b') = ۳$	غیر قابل قبول چون $(a', b') = ۴$	قابل قبول

بنابراین: $b-a=d(b'-a')=۲۳۱\times(۷-۵)=۴۶۲$

۱۵۲. گزینه‌ی ۴.

اگر $۵۳\,|\,۲x^{۲}-x-۶ \Rightarrow ۵۳\,|\,(x-۲)(۲x+۳) \Rightarrow ۵۳\,|\,x-۲ \quad \vee \quad ۵۳\,|\,۲x+۳ \Rightarrow x=۵۳k+۲ \quad \vee \quad x=\frac{۵۳k-۳}{۲}$

$x=۵۳k+۲$ آن‌گاه به ازای $k=۱۸$ داریم: $x=۵۳\times۱۸+۲=۹۵۶$

اگر $x=\frac{۵۳k-۳}{۲}$ آن‌گاه به ازای $k=۳۷$ داریم: $x=\frac{۵۳\times۳۷-۳}{۲}=۹۷۹$

بنابراین رقم یکان بزرگترین عدد ۹ است.

۱۵۳. گزینه‌ی ۴.

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۵۴. گزینه‌ی ۴.

$$x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}\le ۴ \Rightarrow x_{۱}+x_{۲}+x_{۳}+x_{۴}=۴ \Rightarrow \binom{۴+۴-۱}{۴-۱}=\binom{۷}{۳}=۳۵$$

۱۵۵. گزینه‌ی ۴.

$$\frac{۷}{۱۲}\times\frac{۶}{۲۴}+\frac{۵}{۱۲}\times\frac{۳}{۱۸}=\frac{۳۱}{۱۴۴}$$

پاسخ تشریحی از:
سید امیر ستوده و سید محسن فاطمی دبیران دبیرستان استعدادهای درخشان شهید بهشتی شهر ری

سید امیر ستوده: ۰۹۱۲۱۶۱۴۲۹۶
سید محسن فاطمی: ۰۹۱۲۷۷۶۱۵۰۰