سؤالات آزمون سراسری سال ۱۳۹۲

رشته‌ی علوم ریاضی و فیزیک

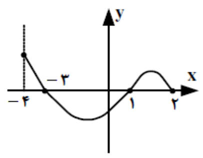
تهیه کننده: ناصر رضائی‌ایوب

ریاضیات پایه، حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱۰۱. به‌ازای کدام مجموعه مقادیر a، نمودار تابع $f(x) = (a - ۳).x^{۲} + ax - ۱$، از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

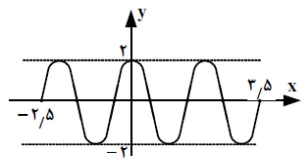
۱) $a \leq ۲$ ۲) $۰ < a \leq ۲$ ۳) $۲ < a < ۳$ ۴) $۰ < a < ۳$

۱۰۲. شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{x.f(x)}$، کدام است؟



۱) $[۰,۲]$ ۲) $[-۳,۲]$ ۳) $[-۴,-۳] \cup [۱,۲]$ ۴) $[-۳,۰] \cup [۱,۲]$

۱۰۳. شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin \pi(\frac{۱}{۲} + bx)$ است. $a.b$ کدام است؟



۱) ۲ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۳/۵

۱۰۴. از هر یک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش آموز به‌یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده‌اند. به‌چند طریق می‌توان ۳ دانش آموز از بین آن‌ها که دوبه‌دو غیر هم‌منطقه‌ای هستند، انتخاب کرد؟

۱) ۵۷۶۰۰ ۲) ۶۷۵۰۰ ۳) ۷۵۶۰۰ ۴) ۷۶۵۰۰

۱۰۵. اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $۲x^{۲} - ۳x - ۴ = ۰$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به‌صورت $\{\frac{۱}{\alpha} + ۱, \frac{۱}{\beta} + ۱\}$ است؟

۱) $۴x^{۲} - ۵x + ۱ = ۰$ ۲) $۴x^{۲} - ۳x + ۱ = ۰$ ۳) $۴x^{۲} - ۵x - ۱ = ۰$ ۴) $۴x^{۲} - ۳x - ۱ = ۰$

۱۰۶. مجموعه جواب نامعادله‌ی $(x - ۴).|x| < ۲x - ۵$، به‌کدام صورت است؟

۱) $(۱,۵)$ ۲) $(۱ - \sqrt{۶}, ۱ + \sqrt{۶})$ ۳) $(۱,۵) \cup (۱ + \sqrt{۶}, +\infty)$ ۴) $(-\infty, ۱ - \sqrt{۶}) \cup (۱,۵)$

۱۰۷. اگر $f(x) = ۲x + ۳$ و $g(f(x)) = ۸x^{۲} + ۲۲x + ۲۰$ باشند، ضابطه‌ی تابع fog، کدام است؟

۱) $۲x^{۲} - ۷x + ۳$ ۲) $۲x^{۲} - ۳x + ۷$ ۳) $۴x^{۲} - ۲x + ۱۳$ ۴) $۴x^{۲} - ۴x + ۱۱$

۱۰۸. تابع $f(x) = x^{۲} + ۲x + ۱$ با دامنه‌ی $(-۱, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و $f^{-۱}$ در چند نقطه متقاطع هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیر متقاطع

۱۰۹. جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $۲\sqrt{۲}\sin x.\cos x = \sin x + \cos x$، کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{۲k\pi}{۳} - \frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴}$ ۴) $۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴}$

۱۱۰. حاصل عبارت $\tan^{-1}\sqrt{x^2+x}+\sin^{-1}(x^2+x+1)$، کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{3\pi}{4}$ ۴) π

۱۱۱. اگر $2^a=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}$ باشد، آن‌گاه a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۱۲. اگر $f(x)=(x^2-x-2).\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -3 ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

۱۱۳. اگر $f(x)=\max\{|2x|,|x+1|\}$، آن‌گاه می‌نیمم تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) 2

۱۱۴. حاصل $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 1 ۴) 2

۱۱۵. اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=\begin{cases}f(x) & x\notin\mathbb{Z}\\ f(x)-1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$، آن‌گاه تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع g روی بازه‌ی $[-4,4]$، کدام است؟

۱) 1 ۲) 2 ۳) 3 ۴) صفر

۱۱۶. کم‌ترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$، کدام است؟

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $-\frac{1}{6}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) صفر

۱۱۷. تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax^3+bx & x<1\\ 2\sqrt{4x-3} & x\geq 1\end{cases}$، بر روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

۱۱۸. اگر $f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$؛ حاصل $f'(g(x)).g'(x)$، کدام است؟

۱) $\frac{2}{x}$ ۲) $\frac{2}{x^2}$ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-3}{x^2}$

۱۱۹. اگر $f(x)=x.e^x \ ; \ x>0$، آن‌گاه خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به‌طول e واقع بر آن، محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{e}$

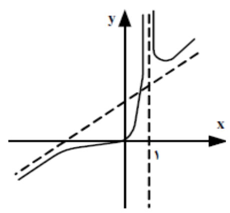
۱۲۰. به‌ازای کدا مجموعه مقادیر a، تقعر منحنی به‌معادله‌ی $y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2$، همواره رو به بالا است؟

۱) $-1<a<1$ ۲) $-1<a<2$ ۳) $-2<a<1$ ۴) $-2<a<2$

۱۲۱. مجموعه‌ی طول نقاط عطف منحنی به‌معادله‌ی $y=x.|x^2-4x|$، کدام است؟

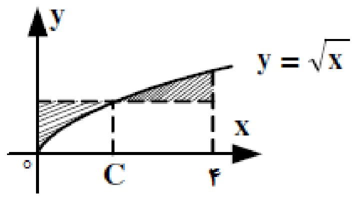
۱) $\{\frac{4}{3}\}$ ۲) $\{0,\frac{4}{3},4\}$ ۳) $\{\frac{4}{3},4\}$ ۴) $\{0,\frac{4}{3}\}$

۱۲۲. شکل روبه‌رو، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^3+ax^2}{x^2+bx+c}$ است. عدد $(bc-a)$ کدام است؟



۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

۱۲۳. در شکل زیر، مساحت دو ناحیه زده برابرند، c کدام است؟



۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۲۴. حاصل انتگرال $\int_{۱}^{۴} \sqrt{(\frac{۱}{۴}x^{۲} - \frac{۱}{x^{۲}})^{۲} + ۱}dx$ ، کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۰۱. گزینه‌ی (۱). اولاً شرط اساسی برای آن‌که نمودار تابع $f(x) = (a-3).x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول عبور نکند، آن است که ضریب x^2 عددی منفی باشد، یعنی $a - 3 < 0$ یا $a < 3$. ثانیاً اگر نمودار تابع از ناحیه‌ی اول عبور نکند، آن‌گاه حالت‌های زیر را خواهیم داشت.

حالت اول: نمودار تابع از دو ناحیه‌ی سوم و چهارم عبور کند؛ در این حالت باید داشته باشیم $\Delta \leq 0$. در نتیجه،

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 - 4\times(-1)\times(a-3) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0$$

$$a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a+6).(a-2) = 0 \Rightarrow a = -6, a = 2$$

a	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$a^2+4a-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow -6 \leq a \leq 2 \qquad (1)$$

حالت دوم: نمودار تابع از سه ناحیه‌ی دوم، سوم و چهارم عبور کند. که در این حالت باید داشته باشیم $\Delta > 0$، $a \times c > 0$ و $-a\times b < 0$. در نتیجه،

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow a^2 - 4\times(-1)\times(a-3) \leq 0 \Rightarrow a^2 + 4a - 12 \leq 0$$

$$a^2 + 4a - 12 = 0 \Rightarrow (a+6).(a-2) = 0 \Rightarrow a = -6, a = 2$$

a	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$a^2+4a-12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\Rightarrow a < -6 \text{ یا } a > 2$$

$$a \times c > 0 \Rightarrow (a-3)\times(-1) > 0 \Rightarrow a < 3$$

$$-a \times b < 0 \Rightarrow -(a-3)\times a < 0 \Rightarrow -a^2 + 3a < 0$$

a	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-a^2+3a$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\Rightarrow a < 0 \text{ یا } a > 3$$

که در آن با توجه به‌این‌که باید همواره $a < 3$ باشد، شرط $a > 3$ غیر قابل قبول است. در نتیجه، در این حالت داریم

$$a < -6 \quad ; \quad a < 3 \quad ; \quad a < 0 \Rightarrow a < -6 \qquad (2)$$

$a > 2 \quad ; \quad a < 3 \quad ; \quad a < 0 \Rightarrow$ این حالت هرگز اتفاق نمی‌افتد

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم

$$(1),(2) \Rightarrow a < -6 \text{ یا } -6 \leq a \leq 2 \Rightarrow a \leq 2$$

۱۰۲. گزینه‌ی (۴). با توجه به نمودار تابع f نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$\forall x \in [-4,-3] : f(x) \geq 0 \quad ; \quad \forall x \in [-3,0] : f(x) \leq 0$$
$$\forall x \in [0,1] : f(x) \leq 0 \quad ; \quad \forall x \in [1,2] : f(x) \geq 0$$

بنابراین، دامنه‌ی تعریف تابع $g(x) = \sqrt{x.f(x)}$ به‌صورت زیر است.

$$g(x) = \sqrt{x.f(x)} \Rightarrow x.f(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 & ; \quad f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [1,2] \\ x \leq 0 & ; \quad f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-3,0] \end{cases} \Rightarrow d_g = [-3,0] \cup [1,2]$$

۱۰۳. گزینه‌ی (۱). با توجه به نمودار تابع $y = a\sin\pi(\frac{1}{2} + bx) = a\cos b\pi x$ نتایج زیر را حاصل می شود.

$$\text{دوره‌ی تناوب} = T = 2 \quad ; \quad \text{بزرگ‌ترین مقدار} = 2 \Rightarrow a = 2 \quad ; \quad \text{کوچک‌ترین مقدار} = -2$$

از طرفی می‌دانیم که دوره‌ی تناوب تابع $y = a\cos b\pi x$ برابر $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$ است، پس باید داشته باشیم

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} \quad ; \quad T = 2 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b\pi|} = 2 \Rightarrow \frac{1}{|b|} = 1 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1 \Rightarrow a \times b = 2\times(\pm 1) = \pm 2$$

۱۰۴. گزینه‌ی (۲).

$$\text{تعداد حالات انتخاب سه دانش آموز به‌طوری‌که دوبه‌دو غیر هم‌منطقه‌ای باشند} = \binom{6}{3}\times\binom{15}{1}\times\binom{15}{1}\times\binom{15}{1}=\binom{6}{3}\times 15^3$$

$$=\frac{6!}{3!(6-3)!}\times 15^3=\frac{6!}{3!3!}\times 15^3$$

$$=\frac{6\times5\times4\times3!}{3!3!}\times 15^3=\frac{6\times5\times4}{3!}\times 15^3=67500$$

۱۰۵. گزینه‌ی (۳). با فرض $\alpha'=\frac{1}{\alpha}+1$ و $\beta'=\frac{1}{\beta}+1$ داریم

$$2x^2-3x-4=0\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow \quad ; \quad \alpha\times\beta=\frac{c}{a}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$\alpha'+\beta'=\frac{1}{\alpha}+1+\frac{1}{\beta}+1=\frac{\alpha+\beta+2\alpha\times\beta}{\alpha\times\beta}=\frac{\frac{3}{2}+2\times(-2)}{-2}=\frac{3-8}{-4}=\frac{5}{4}$$

$$\alpha'\times\beta'=(\frac{1}{\alpha}+1)+(\frac{1}{\beta}+1)=\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+1=\frac{1+\alpha+\beta+\alpha\times\beta}{\alpha\times\beta}=\frac{1+\frac{3}{2}-2}{-2}=\frac{3-2}{-4}=-\frac{1}{4}$$

$$\alpha'+\beta'=-\frac{b'}{a'}\quad ; \quad \alpha'+\beta'=\frac{5}{4}\Rightarrow -\frac{b'}{a'}=\frac{5}{4}\Rightarrow (a'=-4\ ;\ b'=5)\ \text{یا}\ (a'=4\ ;\ b'=-5)$$

$$\alpha'\times\beta'=\frac{c'}{a'}\quad ; \quad \alpha'\times\beta'=-\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{c'}{a'}=-\frac{1}{4}\Rightarrow (a'=-4\ ;\ c'=1)\ \text{یا}\ (a'=4\ ;\ c'=-1)$$

$$a'x^2+b'x+c'=0\Rightarrow 4x^2-5x-1=0\ \text{یا}\ -4x^2+5x+1=0$$

۱۰۶. گزینه‌ی (۴).

$$(x-4).|x|<2x-5\quad ;\quad x\geq 0\Rightarrow (x-4).x<2x-5\Rightarrow x^2-4x<2x-5\Rightarrow x^2-6x+5<0$$

$$x^2-6x+5=0\Rightarrow (x-1).(x-5)=0\Rightarrow x=1,5$$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
x^2-6x+5		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow 1<x<5\Rightarrow x\in(1,5)$

$$(x-4).|x|<2x-5\quad ;\quad x<0\Rightarrow (x-4).(-x)<2x-5\Rightarrow -x^2+4x<2x-5\Rightarrow x^2-2x-5>0$$

$$x^2-2x-5=0\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=1\pm\sqrt{6}$$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{6}$		$1+\sqrt{6}$		$+\infty$
x^2-2x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\Rightarrow x<1-\sqrt{6}\ \text{یا}\ x>1+\sqrt{6}$

چون در این حالت باید $x<0$ باشد، پس تنها جواب $x<1-\sqrt{6}$ قابل قبول است. بنابراین،

$$x\in(-\infty,1-\sqrt{6})\ \text{یا}\ x\in(1,5)\Rightarrow x\in(-\infty,1-\sqrt{6})\cup(1,5)$$

۱۰۷. گزینه‌ی (۳).

$$f(x)=2x+3\Rightarrow u=2x+3\Rightarrow x=\frac{u-3}{2}$$

$$g(f(x))=8x^2+22x+20\Rightarrow g(u)=8\Big(\frac{u-3}{2}\Big)^2+22\Big(\frac{u-3}{2}\Big)+20$$

$$=2(u^2-6u+9)+11(u-3)+20$$

$$=2u^2-12u+18+11u-33+20$$

$$=2u^2-u+5$$

$$\Rightarrow g(x)=2x^2-x+5$$

$$fog(x)=f(g(x))=f(2x^2-x+5)=2\times(2x^2-x+5)+3=4x^2-2x+13$$

۱۰۸. گزینه‌ی (۴). محل تلاقی نمودار تابع f با تابع f^{-1}، همان محل تلاقی نمودار تابع f با خط $y=x$ است. بنابراین،

$$f(x)=x^2+2x+1\ ;\ y=x\Rightarrow x^2+2x+1=x\Rightarrow x^2+x+1=0\Rightarrow \Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$$

چون $\Delta<0$، پس نمودار تابع f با تابع f^{-1}، هیچ برخوردی ندارد.

۱۰۹. گزینه‌ی (۳).

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\quad ;\quad 2\sqrt{2}\sin x.\cos x=\sqrt{2}\sin 2x$$

$$2\sqrt{2}\sin x.\cos x=\sin x+\cos x\Rightarrow \sqrt{2}\sin 2x=\sqrt{2}\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\Rightarrow \sin 2x=\sin(x+\tfrac{\pi}{4})$$

$$\sin 2x=\sin(x+\tfrac{\pi}{4})\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi+x+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\ 2x=2k\pi+\pi-x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow 3x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$$

۱۱۰. گزینه‌ی (۲). چون هیچ قیدی در صورت سؤال مطرح نشده است، پس با جای‌گذاری یک مقدار به‌جای x، مثلاً مقدار صفر، بلافاصله، گزینه‌ی مورد نظر مشخص می‌گردد.

$$x=0\Rightarrow y=\tan^{-1}\sqrt{0^2+0}+\sin^{-1}(0^2+0+1)=\tan^{-1}0+\sin^{-1}1=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

۱۱۱. گزینه‌ی (۲).

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}}{\cos(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}-\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{-\sin(x+\frac{\pi}{4})}=\frac{\frac{-\sin\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}}}-\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}}}{-\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}\times\sqrt[4]{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\times\sqrt[4]{2}}{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-1}=2^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow a=-\frac{1}{4}$$

۱۱۲. گزینه‌ی (۱). فرض کنید $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}=g(x).h(x)$. دراین‌صورت چون

$$g(-1)=0\quad ;\quad h(-1)=\sqrt[3]{(-1)^2-7\times(-1)}=\sqrt[3]{8}=2\neq 0$$

لذا

$$g'(x)=2x-1\Rightarrow g'(-1)=2\times(-1)-1=-3$$
$$f'(-1)=g'(-1)\times h(-1)=-3\times 2=-6$$

۱۱۳. گزینه‌ی (۲). با تعیین علامت عبارت $|2x|-|x+1|$ داریم

$$|2x|=|x+1|\Rightarrow 4x^2=x^2+2x+1\Rightarrow 3x^2-2x-1=0\Rightarrow x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}=\frac{1\pm\sqrt{1+3}}{3}=\frac{1\pm 2}{3}=-\frac{1}{3},1$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2-2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

در نتیجه، تابع f را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$f(x)=\max\{|2x|,|x+1|\}=\begin{cases}|2x| & |2x|\geq|x+1|\\ |x+1| & |2x|<|x+1|\end{cases}=\begin{cases}|2x| & x\leq-\frac{1}{3}\ \ or\ \ x\geq 1\\ |x+1| & -\frac{1}{3}<x<1\end{cases}$$

چون مشتق تابع f در نقاط مرزی؛ یعنی، $x=-\frac{1}{3}$ و $x=1$ وجود ندارد، لذا این نقاط، نقاط بحرانی تابع می‌باشند و تابع هیچ نقطه‌ی بحرانی دیگری ندارد.

$$x=-\frac{1}{3}\Rightarrow f(-\tfrac{1}{3})=|2\times(-\tfrac{1}{3})|=\frac{2}{3}\quad ;\quad x=-1\Rightarrow f(1)=|1+1|=2\Rightarrow \min f=\frac{2}{3}$$

۱۱۴. گزینه‌ی (۱).

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos 2x}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{-\sin x\times\cos(1+\cos x)}{2\sin 2x}=\frac{0}{0}$$

$$\overset{H}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{-\cos x\times\cos(1+\cos x)-(-\sin x)\times(-\sin x)\times\sin(1+\cos x)}{4\cos 2x}$$

$$=\frac{-\cos\pi\times\cos(1+\cos\pi)-(-\sin\pi)\times(-\sin\pi)\times\sin(1+\cos\pi)}{4\cos 2\pi}=\frac{-(-1)\times\cos 0-0}{4}=\frac{1}{4}$$

۱۱۵. گزینه‌ی (۴).

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & x\notin\mathbb{Z}\\ f(x)-1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}[x]+[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ [x]+[-x]-1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ 0-1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}-1 & x\notin\mathbb{Z}\\ -1 & x\in\mathbb{Z}\end{cases}=-1$$

در نتیجه، تابع g ، یک تابع ثابت بوده؛ و لذا هیچ نقطه‌ی ناپیوستگی ندارد.

۱۱۶. گزینه‌ی (۴). دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}$ برابر $\mathbb{R}$ بوده؛ و این تابع بر $\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشد.

$$f(x)=x+\sqrt[3]{x^2-x^3}\Rightarrow f'(x)=1+\frac{2x-3x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}}=\frac{3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}+2x-3x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}}$$

$$f'(x)\overset{set}{=}0\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}+2x-3x^2=0\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}=3x^2-2x$$

$$\Rightarrow 3\sqrt[3]{(x^2-x^3)^2}=3x^2-2x\Rightarrow 27(x^2-x^3)^2=(3x^2-2x)^3$$

$$\Rightarrow 27x^4-54x^5+x^6=27x^6-54x^5+36x^4-8x^3$$

$$\Rightarrow 26x^6+9x^4-8x^3=0\Rightarrow x^3.(26x^3+9x-8)=0$$

اگر قرار دهید $g(x)=26x^3+9x-8$ ، آن‌گاه

$$\left.\begin{aligned}g(0)&=26\times 0^3+9\times 0-8=-8\\ g(1)&=26\times 1^3+9\times 1-8=27\end{aligned}\right\}\Rightarrow g(0)\times g(1)<0$$

و در نتیجه، بنابر قضیه‌ی بولتزانو معادله‌ی $26x^3+9x-8=0$ در بازه‌ی $(0,1)$ حداقل یک ریشه‌ی حقیقی دارد. از طرفی چون

$$g'(x)=78x^2+9$$

و به‌ازای‌هر $x\in\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$ ؛ لذا معادله‌ی $26x^3+9x-8=0$ دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی در بازه‌ی $(0,1)$ دارد. فرض کنید این ریشه‌ی حقیقی برابر α باشد. دراین‌صورت نقاط $x=0$ و $x=\alpha$ نقاط بحرانی تابع f می‌باشند. با تعیین علامت تابع f' داریم

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	∞	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$ نزولی	min	$\nearrow$ صعودی	max	$\searrow$ نزولی	

با توجه به جدول تغییرات تابع f نتیجه می‌شود که این تابع در نقطه‌ای به‌طول $x=0$ می‌نیمم نسبی دارد که مقدار تابع در این نقطه برابر صفر است. از طرفی چون به‌ازای‌هر $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ ، $f(x)>0$ ؛ پس نقطه‌ای به‌طول $x=0$ می‌نیمم مطلق تابع f نیز می‌باشد. بنابراین، کم‌ترین مقدار تابع برابر در نقطه‌ای به‌طول $x=0$ حاصل می‌شود که مقدار تابع در این نقطه برابر صفر است.

۱۱۷. گزینه‌ی (۲). اولاً شرط آن‌که تابع $f(x)=\begin{cases}ax^3+bx & x<1\\ 2\sqrt{4x-3} & x\geq 1\end{cases}$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد آن است که بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. در نتیجه، تابع f باید در نقاط مرزی نیز پیوسته باشد. داریم

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax^3+bx)=a+b\quad ;\quad f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}2\sqrt{4x-3}=2$$

شرط پیوستگی: $f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)\Rightarrow a+b=2\qquad (1)$

ثانیاً باید مشتق چپ و راست تابع در نقطه‌ی مرزی وجود داشته و با هم برابر باشد. پس

$$f'(x)=3ax^2+b\quad,\quad x<1\qquad ;\qquad f'(x)=\frac{4}{\sqrt{4x-3}}\quad,\quad x>1$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(3ax^2+b)=3a+b\quad ;\quad f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{4}{\sqrt{4x-3}}=4$$

شرط مشتق‌پذیری: $f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow 3a+b=4\qquad (2)$

با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\\ 3a+b=4\end{cases}\overset{\times(-1)}{\Rightarrow}\begin{cases}-a-b=-2\\ 3a+b=4\end{cases}$$

$$\overline{\quad 2a=2\quad}\Rightarrow a=1\quad ;\quad 1+b=2\Rightarrow b=1$$

۱۱۸. گزینه‌ی (۲).

$$f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}=\frac{x^3-2}{x^3+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1-(-2)}{(1+x^3)^2}\times 3x^2=\frac{9x^2}{(1+x^3)^2}$$

$$g(x)=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

$$f'(g(x)).g'(x)=f'(\sqrt[3]{x-1}).g'(x)=\frac{9\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(1+(\sqrt[3]{x-1})^3)^2}\times\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\frac{3}{(1+x-1)^2}=\frac{3}{x^2}$$

راه‌حل دوم: اگر قرار دهید $h(x)=f(g(x))$، آن‌گاه

$$h(x)=f(g(x))=f(\sqrt[3]{x-1})=\frac{(\sqrt[3]{x-1})^3-2}{1+(\sqrt[3]{x-1})^3}=\frac{x-1-2}{1+x-1}=\frac{x-3}{x}\Rightarrow h'(x)=\frac{0-(-3)}{x^2}=\frac{3}{x^2}$$

$$f'(g(x)).g'(x)=h'(x)=\frac{3}{x^2}$$

۱۱۹. گزینه‌ی (۳).

نقطه‌ی تماس با منحنی f^{-1}: $(e,x)\in f^{-1}\Rightarrow (x,e)\in f\Rightarrow x.e^x=e\Rightarrow x=1\Rightarrow A(e,1)$

$$f(x)=x.e^x\Rightarrow f'(x)=(x+1).e^x\Rightarrow f'(1)=(1+1).e^1=2e\Rightarrow m=(f^{-1})'(e)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2e}$$

معادله‌ی خط مماس: $y-y_A=m(x-x_A)\Rightarrow y-1=\frac{1}{2e}(x-e)\Rightarrow y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$

محل تلاقی با محور y ها $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=\frac{1}{2e}\times 0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

۱۲۰. گزینه‌ی (۴).

$$y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2\Rightarrow y'=4x^3+3ax^2+3x\quad ;\quad y''=12x^2+6ax+3$$

شرط آن‌که تقعر منحنی همواره رو به بالا باشد، آن است که $\Delta_{(y'')}<0$، پس

$$\Delta_{(y'')}<0\Rightarrow 36a^2-144<0\Rightarrow 36a^2<144\Rightarrow a^2<4\Rightarrow |a|<2\Rightarrow -2<a<2$$

۱۲۱. گزینه‌ی (۴).

$$y=x.|x^2-4x|=\begin{cases}x^3-4x^2 & x<0\ \ or\ \ x>4\\ 4x^2-x^3 & 0\le x\le 4\end{cases}$$

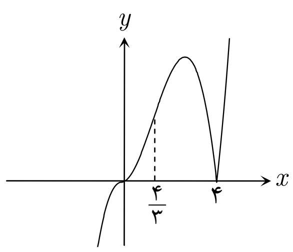
$$y'=\begin{cases}3x^2-8x & x<0\ \ or\ \ x>4\\ 8x-3x^2 & 0\le x\le 4\end{cases}\quad ;\quad y''=\begin{cases}6x-8 & x<0\ \ or\ \ x>4\\ 8-6x & 0<x<4\end{cases}$$

نقطه‌ی بحرانی تابع y': $y''=0\Rightarrow 6x=8\Rightarrow x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

هم‌چنین، چون مشتق دوم تابع در نقاط $x=0$ و $x=4$ وجود ندارد، لذا این نقاط نیز نقاط بحرانی تابع y' می‌باشند. با تعیین علامت تابع y'' داریم

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		4		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$-$	
$f(x)$		$\cap$ محدب	عطف	$\cup$ مقعر	عطف	$\cap$ محدب		$\cap$ محدب	

در نتیجه، نقاطی به‌طول $x=0$ و $x=\frac{4}{3}$، نقاط عطف منحنی نمایش تابع هستند. نمودار تابع $y=x.|x^2-4x|$ در شکل زیر رسم شده است.



۱۲۲. گزینه‌ی (۱). چون خط $x=1$ مجانب قائم منحنی تابع است، پس مخرج کسر به‌ازای $x=1$ باید برابر صفر شود. در نتیجه،

$$x=1 \quad ; \quad x^2+bx+c=0 \Rightarrow 1+b+c=0 \Rightarrow b=-1-c \qquad (1)$$

از طرفی خط $x=1$ مجانب قائم منحنی تابع با انفصال مضاعف می‌باشد، پس $x=1$ باید ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $x^2+bx+c=0$ باشد. لذا

$$\Delta=0 \Rightarrow b^2-4c=0 \Rightarrow c^2+2c+1-4c=0 \Rightarrow c^2-2c+1=0 \Rightarrow (c-1)^2=0 \Rightarrow c=1 \;\; ; \;\; b=-1-1=-2$$

بنابراین، ضابطه‌ی تابع به‌صورت زیر در می‌آید.

$$f(x)=\frac{x^3+ax^2}{x^2+bx+c}=\frac{x^3+ax^2}{x^2-2x+1}$$

در نتیجه،

$$f'(x)=\frac{(3x^2+2ax).(x^2-2x+1)-(2x-2).(x^3+ax^2)}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{3x^4-6x^3+3x^2+2ax^3-4ax^2+2ax+2x^3+2ax^2-2x^4-2ax^3}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$=\frac{x^4-4x^3+3x^2-2ax^2+2ax}{(x-1)^4}=\frac{x.(x^2-3x-2a)}{(x-1)^3}$$

چون تابع f در نقطه‌ی $x=0$ اکسترمم نسبی ندارد، لذا $x=0$ باید ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $f'(x)=0$ باشد. بنابراین، $-2a=0$ یا $a=0$. در نتیجه،

$$bc-a=(-2)\times 1-0=-2$$

۱۲۳. گزینه‌ی (۲).

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}dx=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$f(x)=\sqrt{x} \quad ; \quad f(c)=\frac{4}{3}\Rightarrow\sqrt{c}=\frac{4}{3}\Rightarrow c=\frac{16}{9}$$

۱۲۴. گزینه‌ی (۳).

$$\int_1^4\sqrt{(\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{x^2})^2+1}\,dx=\int_1^4\sqrt{(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{x^2})^2}\,dx=\int_1^4(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{x^2})dx=(\tfrac{1}{4}\times\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{x})\Big|_1^4$$

$$=(\tfrac{1}{12}x^3-\tfrac{1}{x})\Big|_1^4=(\tfrac{1}{12}\times 4^3-\tfrac{1}{4})-(\tfrac{1}{12}-1)=\tfrac{72}{12}=6$$