

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : علوم ریاضی	ساعت شروع : ۱۰ صبح	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۳/۱۰/۱۳	تعداد صفحه : ۱
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور درنوبت دی ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش	http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد) بلامانع است.		
۱	نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :	$ a - b \leq a - b $
۲	به کمک تعریف ، ثابت کنید دنباله $\{n^2\}$ واگرا به $+\infty$ است.	
۳	حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$ را بدون استفاده از هم ارزی و هویتال محاسبه کنید.	
۴	معادله مجانب مایل تابع زیر را در صورت وجود، به دست آورید.	$y = \frac{x^3 + 2x + 5}{x^2 + 1}$
۵	به کمک تعریف مشتق ، شیب خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + 2$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی بیابید.	
۶	معادله حرکت ذره ای به صورت $s = t^3 - 4t^2 + 2t + 3$ است. (s بر حسب سانتی متر و t بر حسب ثانیه است) شتاب این ذره را به عنوان تابعی از زمان پیدا کنید. پس از گذشت ۳ ثانیه شتاب چقدر است؟	
۷	به ازای چه مقادیری از a و b و c تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 1 \\ ax^2 + bx + c & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق مرتبه دوم دارد؟	
۸	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $x^2 + y^4 = xy^3 + 8$ ب) $y = \ln x^2$ ج) $y = e^{\tan x}$	
۹	ثابت کنید اگر تابع f زوج و مشتق پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش فرد است.	
۱۰	نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ را پیدا کنید.	
۱۱	مخزنی استوانه ای به شعاع ۳ متر را با آهنگ ۲ متر مکعب بر دقیقه از آب پر میکنند. ارتفاع آب با چه آهنگی بالا می آید؟	
۱۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^4 + 3$ را رسم کنید.	
۱۳	الف) جمع $\sum_{i=1}^n 3i$ را بسط دهید. ب) جمع رو به رو را با استفاده از نماد Σ بنویسید.	$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 100x^{99}$
۱۴	انتگرال های معین و نامعین زیر را بیابید. الف) $\int (e^{3x} + \sqrt{x} + \frac{1}{x}) dx$ ب) $\int_0^2 [x] x-1 dx$	
۲۰	موفق باشید	جمع نمره

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۱۰/۱۳	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	طبق نامساوی مثلثی $ a = a - b + b \leq a - b + b \quad (۰/۵)$ $\rightarrow a - b \leq a - b \quad (۰/۲۵)$ <p>(مثال صفحه ۱۶)</p>	۱
۲	فرض کنیم $K > 0$ عدد مثبت دلخواهی باشد $(۰/۲۵)$ باید نشان دهیم از شماره ای به بعد $n^2 > K$ پس شماره ای مانند M است که هرگاه $n \geq M$ ، $n^2 > K$ در اینجا K معلوم مساله است. اما نامساوی $n^2 > K$ معادل $n > \sqrt{K}$ می باشد. $(۰/۲۵)$ می توانیم شماره ی M مجهول را $M = \lfloor \sqrt{K} \rfloor + 1$ اختیار کنیم. $(۰/۵)$ <p>(تمرین در کلاس صفحه ۳۹)</p>	۲
۳	$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{0}{0}$ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3} \times \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3} \quad (۰/۵) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = 6 \quad (۰/۵)$ <p>(مبحث روش های محاسبه ی بعضی از حدود، صفحه ۸۳)</p>	۳
۴	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2x + 5}{x^3 + 1} = \pm\infty$ <p>چون درجه ی صورت فقط یک واحد از درجه ی مخرج بزرگتر است پس این تابع گویا دارای مجانب مایل است. $(۰/۲۵)$</p> $x^3 + 2x + 5 \left \begin{array}{l} x^3 + 1 \\ -x^3 - x \\ \hline x + 5 \end{array} \right.$ <p>پس $y = x$ معادله ی مجانب مایل این تابع گویاست. $(۰/۷۵)$ <p>(مبحث مجانب مایل صفحه ۱۱۷)</p></p>	۴
۵	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2 - 3}{x - 1} \quad (۰/۵) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2 \quad (۰/۵)$ <p>(مبحث مشتق تابع صفحه ۱۲۴)</p>	۵
۱/۵	$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 8t + 2 \quad (۰/۵)$ $a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 8 \quad (۰/۵)$ $a(3) = 6(3) - 8 = 10 \text{ cm/s}^2 \quad (۰/۵)$ <p>(مثال صفحه ۱۳۸)</p>	۶

ادامه در برگه ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۱۰/۱۳	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۷	$\left. \begin{aligned} f(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b + c \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow a + b + c = 1 \quad (0/25)$ $f'(x) = \begin{cases} 2x^2 & x < 1 \\ 2ax + b & x \geq 1 \end{cases} \quad f'_-(1) = 2, \quad f'_+(1) = 2a + b \Rightarrow 2a + b = 2 \quad (0/25)$ $f''(x) = \begin{cases} 4x & x < 1 \\ 2a & x \geq 1 \end{cases} \quad f''_-(1) = 4, \quad f''_+(1) = 2a \Rightarrow 2a = 4 \quad (0/25)$ $\rightarrow a = 2 \quad (0/25) \quad b = -2 \quad (0/25) \quad c = 1 \quad (0/25)$ <p>(مساله ی ۱۳ صفحه ۱۵۱)</p>	۱/۵
۸	<p>الف) $2x + 4y^3 y' = y^3 + 3y^2 y' x \quad (1)$</p> <p>ب) $y' = \frac{2x}{x^2} \quad (0/5)$</p> <p>ج) $y' = (1 + \tan^2 x) \times e^{\tan x} \quad (0/5)$</p> <p>(مبحث مشتق گیری ضمنی - تابع نمایی و لگاریتمی طبیعی صفحات ۱۶۳-۱۵۴)</p>	۲
۹	<p>مقایسه: D</p> $f(-x) = f(x) \quad (0/25) \rightarrow -f'(-x) = f'(x) \quad (0/25) \rightarrow f'(-x) = -f'(x) \quad (0/25)$ <p>در نتیجه تابع f' فرد است. (۰/۲۵)</p> <p>(مساله ی ۳-الف صفحه ۱۶۳)</p>	۱
۱۰	$D = [0, 4] \quad (0/25)$ $f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x}} \quad (0/5)$ <p>$-2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2 \quad (0/25)$ قابل قبول</p> <p>$-x^2 + 4x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad (0/25) & \text{غیر قابل قبول} \\ x = 4 \quad (0/25) & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$</p> <p>(مبحث نقطه بحرانی صفحه ۱۷۰)</p>	۱/۵
۱۱	$v = \pi r^2 h \quad (0/25)$ $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \times \frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \pi r^2 \times \frac{dh}{dt} \quad (0/5) \rightarrow 2 = \pi (3)^2 \times \frac{dh}{dt} \quad (0/25) \rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{2}{9\pi} \quad (0/5)$ <p>(مساله ی ۲ صفحه ۱۹۶)</p>	۱/۵

ادامه در برگه ی سوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳/۱۰/۱۳۹۳	
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۳	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱۲	<p>$D = \mathbb{R}$ (۰/۲۵)</p> <p>مجاانب ندارد (۰/۲۵)</p> <p>$y' = 4x^3$ (۰/۲۵)</p> <p>$y' = 0 \rightarrow x = 0$ (۰/۲۵)</p> <p>نقاط کمکی: $A(-1, 4), B(1, 4)$</p> <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>$+\infty$</td> <td>3</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> <p>(۰/۵)</p> <p>(مبحث رسم نمودار صفحات ۲۱۰-۱۹۷)</p>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	y'	-	0	+	y	$+\infty$	3	$+\infty$	۲
x	$-\infty$	0	$+\infty$											
y'	-	0	+											
y	$+\infty$	3	$+\infty$											
۱۳	<p>الف) $\sum_{i=1}^n 3i = 3 \sum_{i=1}^n i = 3(1+2+3+\dots+n) = 3 \times \frac{n(n+1)}{2}$ (۰/۵)</p> <p>ب) $1+2x+3x^2+4x^3+\dots+100x^{99} = \sum_{i=1}^{100} ix^{i-1}$ (۰/۷۵)</p> <p>(مسائله های ۳ و ۱۲ صفحه ۲۱۹)</p>	۱/۵												
۱۴	<p>الف) $\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \ln x + c$ (۱)</p> <p>ب) $\int_0^1 -(x-1) \times 0 \, dx + \int_1^2 (x-1) \times 1 \, dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) \Big _1^2 = 0 - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$ (۰/۲۵)</p> <p>(محاسبه انتگرال معین و نامعین به کمک قضایا صفحه ۲۴۷-۲۴۰)</p>	۲/۵												
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر													