

باسمه تعالی

سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۳۰:۱۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دوره‌ی پیش دانشگاهی «۳۰ نمره‌ای»	تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۱۲ / ۲		
دانش‌آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول سال تحصیلی ۸۹ - ۱۳۸۸	اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی	http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱	مجموعه $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2x+1 < 3\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r است. a و r را تعیین کنید.	۰/۷۵
۲	ثابت کنید که $A \subset \mathbb{R}$ کراندار است اگر و فقط اگر عدد حقیقی مثبت K موجود باشد که به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $ x \leq k$.	۱/۲۵
۳	با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید دنباله $\{1 + \sqrt{n}\}$ واگراست.	۱/۵
۴	سه جمله اول دنباله $\left\{n + \frac{1}{n}\right\}$ را نوشته و یکنوایی و کرانداري آنرا بررسی کنید.	۱/۵
۵	همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید و در صورت همگرایی مقدار سری را به دست آورید.	۲/۵
	الف) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$ ب) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ ج) $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{2k^2+1}{2k^2}\right)$	
۶	حدهای زیر را به دست آورید:	۳
	الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) \sin \frac{1}{x-2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}}$	
	ج) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$ د) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} \right)$	
۷	با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:	۱/۵
	$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2 - 4}{x - 1} = 8$	
۸	تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}a - x & , x < 0 \\ [x] + b - 1 & , x = 0 \\ \frac{\sqrt{4 - 4\cos 2x}}{2x} & , x > 0 \end{cases}$ مفروض است. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در $x_0 = 0$ پیوسته باشد.	۱/۵
۹	ثابت کنید معادله $x(x^2 + 2) - 7 = 0$ در بازه $[1, 2]$ دارای ریشه است.	۱
۱۰	معادله‌ی تمام خطوط مجانب منحنی $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۱	اگر g در نقطه‌ی a مشتق پذیر و در یک همسایگی a مخالف صفر باشد، آنگاه $\frac{1}{g}$ در a مشتق پذیر است و $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$	۰/۷۵
۱۲	معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y = \frac{2}{x} + \sqrt{x}$ را در نقطه $x_0 = 4$ به دست آورید.	۱
۱۳	تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x} x-1 $ مفروض است D_f' را تعیین کنید.	۱/۲۵
۱۴	اگر $f(x^3 + 6x) = g(\sin 3x + \sin 2x)$ و $f'(0) = 4$ باشد، مقدار $g'(0)$ را به دست آورید.	۱
	جمع نمره	۲۰
	«موفق باشید»	

WWW.RIAZISARA.IR

دانلود نمونه سؤالات از سایت ریاضی سرا

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)		رشته: علوم ریاضی
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۱۲ / ۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول سال تحصیلی ۱۳۸۸-۸۹		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	<p>۰/۲۵ $-3 < 2x + 1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 1$ (۰/۲۵)</p> <p>مرکز $a = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$ (۰/۲۵) و شعاع $r = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ (۰/۲۵)</p>	۰/۲۵
۲	<p>۱/۲۵ $\exists k > 0, \forall x \in A, x \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k \Rightarrow A$ کراندار است (۰/۲۵)</p> <p>اثبات عکس:</p> <p>قرار می دهیم: $k = \max\{ c , d \}$ (۰/۲۵) در این صورت $k > 0$ داریم:</p> <p>$\forall x \in A, -k \leq - c \leq c < x < d \leq d \leq k$ (۰/۲۵)</p> <p>$\Rightarrow -k \leq x \leq k \Rightarrow x \leq k$ (۰/۲۵)</p>	۱/۲۵
۳	<p>۱/۵ فرض خلف: فرض کنیم دنباله همگرا به عدد L باشد (۰/۲۵)</p> <p>$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sqrt{n}) = L \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, n \geq M \Rightarrow 1 + \sqrt{n} - L < \varepsilon$ (۰/۲۵)</p> <p>$\equiv -\varepsilon < 1 + \sqrt{n} - L < \varepsilon$ (۰/۲۵) $\equiv L - 1 - \varepsilon < \sqrt{n} < L - 1 + \varepsilon$ (۰/۲۵)</p> <p>در رابطه‌ی اخیر در صورتی که $\varepsilon = 1$ در نظر بگیریم داریم $n < L^2$ و در نتیجه (L^2) یک کران بالا برای اعداد طبیعی می باشد (تناقض) پس فرض خلف باطل و دنباله واگراست. (۰/۵)</p>	۱/۵
۴	<p>۱/۵ $2, \frac{5}{2}, \frac{10}{3}, \dots \rightarrow +\infty$ (۰/۲۵)</p> <p>دنباله کران دار نیست (۰/۲۵) دنباله صعودی است (۰/۲۵)</p> <p>$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) + (\frac{1}{n+1})}{n + \frac{1}{n}} = \frac{n^2 + 2n + 2}{n^2 + 1} = \frac{n^3 + 2n^2 + 2n}{n^3 + n^2 + n + 1} \geq 1$ (۰/۲۵)</p> <p>زیرا $\left[n^3 + 2n^2 + 2n \geq n^3 + n^2 + n + 1 \Leftrightarrow n^2 + n \geq 1 \Leftrightarrow n(n+1) \geq 1 \right]$ رابطه‌ی اخیر همواره برقرار است. (۰/۲۵)</p>	۱/۵
«ادامه در صفحه‌ی دوم»		

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)		رشته: علوم ریاضی
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۱۲ / ۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول سال تحصیلی ۱۳۸۸-۸۹		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۵	<p>الف) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (۰/۲۵)</p> <p>$s_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$ (۰/۲۵)</p> <p>$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{4}$ (۰/۲۵) سری همگراست</p> <p>ب) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (۰/۵) $r = \frac{1}{2}, a = \frac{1}{4}, r < 1$ (۰/۲۵) سری همگراست</p> <p>ج) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{3n^2 + 1}{2n^2} \right) = \log \left(\frac{3}{2} \right) \neq 0$ (۰/۵) (۰/۲۵) سری واگراست</p>	۲/۵
۶	<p>الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (4 - x^2) \times \sin \left(\frac{1}{x-2} \right) = 0 \times \text{(تابع در همسایگی عدد ۲ کراندار است)} = 0$ (۰/۵)</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{x^2 - (x^2 + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + x}}{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-x} = -2$ (۰/۵)</p> <p>ج) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{ \sin x } = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \times 3}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1 \times 3}{1} = 3$ (۰/۲۵)</p> <p>د) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 4}{(x - 2)^2} = -\infty$ (۰/۲۵)</p>	۳
۷	<p>$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2 - 4}{x - 1} = 8 \equiv \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < -(x - 1) < \delta \Rightarrow \left \frac{4x^2 - 4}{x - 1} - 8 \right < \varepsilon$ (۰/۵)</p> <p>$\equiv 4(x + 1) - 8 < \varepsilon$ (۰/۲۵) $\equiv 4 x - 1 < \varepsilon$ (۰/۲۵) $\equiv -(x - 1) < \frac{\varepsilon}{4}$ (۰/۲۵)</p> <p>کافی است $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{4}$ اختیار داریم، تا استلزام فوق همواره برقرار باشد. (۰/۲۵)</p>	۱/۵
۸	<p>$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \sin^2 x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \times \frac{\sin x}{x} = \sqrt{2}$ (۰/۲۵)</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{2} a - x = \sqrt{2} a$ (۰/۲۵)</p> <p>$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = f(0) \Rightarrow \sqrt{2} a = \sqrt{2} = b - 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = 1$ (۰/۲۵), $b = 1 + \sqrt{2}$ (۰/۲۵)</p>	۱/۵
«ادامه در صفحه‌ی سوم»		

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح سوالات امتحان هماهنگ درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)		رشته: علوم ریاضی
دوره‌ی پیش دانشگاهی (۲۰ نمره ای)		تاریخ امتحان: ۱۳۸۸ / ۱۲ / ۲
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول سال تحصیلی ۱۳۸۸-۸۹		اداره‌ی کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی http://aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۹	تابع f باضابطه ی $f(x) = x(x^2 + 2) - 7$ در بازه $[1, 2]$ پیوسته است (۰/۲۵) و $f(1) = -4, f(2) = 5$ (۰/۲۵) $f(1).f(2) < 0$ (۰/۲۵) پس بنابر نتیجه قضیه مقدار میانی حداقل یک $1 < x_0 < 2$ وجود دارد که $f(x_0) = 0$ (۰/۲۵)	۱
۱۰	$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x}$ $D = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ (۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2 + 2x} = +\infty$ (۰/۲۵) وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، مجانب مایل $y = 2x + 1$ (۰/۵) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 + 2x} = -1$ (۰/۲۵) وقتی $x \rightarrow -\infty$ ، مجانب افقی $y = -1$ (۰/۲۵)	۱/۵
۱۱	قضیه کتاب (۰/۷۵)	۰/۷۵
۱۲	$(x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2})$ (۰/۲۵) $f'(x_0) = \frac{-2}{x_0^2} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{8}$ (۰/۲۵) $y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)} \times (x - x_0)$ (۰/۲۵) $\Rightarrow (y - \frac{5}{2}) = -8(x - 4)$ (۰/۲۵)	۱
۱۳	$f(x) = \sqrt{x} x-1 $ $D_f = [0, +\infty)$ تابع f در $x_0 = 0$ فقط پیوستگی راست دارد پس $f'(0)$ موجود نیست. (۰/۲۵) $f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} x-1 - 0}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1$ (۰/۲۵) $f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} x-1 - 0}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\sqrt{x} = -1$ (۰/۲۵) $f'_+(1) \neq f'_-(1) \Rightarrow f'(1)$ موجود نیست (۰/۲۵) پس: $D_{f'} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۱۴	$(3x^2 + 6) \times f'(x^2 + 6x) = (2 \cos 3x + 2 \cos 2x) \times g'(\sin 3x + \sin 2x)$ (۰/۵) $x = 0 \Rightarrow 6 \times f'(0) = 5 \times g'(0)$ (۰/۲۵) $6 \times 4 = 5g'(0) \Rightarrow g'(0) = \frac{24}{5}$ (۰/۲۵)	۱
۲۰	جمع نمره	

مصححین محترم:

برای راه حل های صحیح دیگر بارم را به تناسب منظور نمایید.

WWW.RIAZISARA.IR

دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا