

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دوره‌ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۴ / ۲		
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۹-۱۳۸۸	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir		

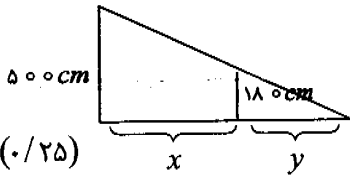
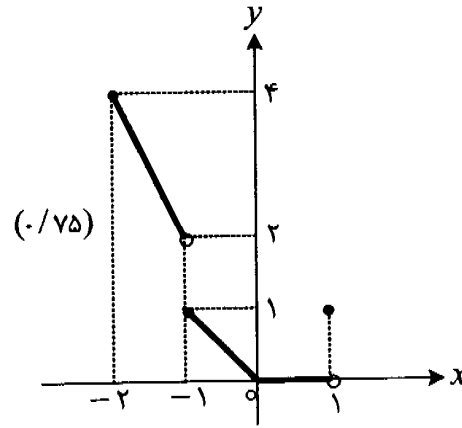
ردیف	سؤالات	نمره												
۱	تعیین کنید در چه نقاطی روی نمودار $x^2 - xy + y^2 = 3$ مماس بر منحنی افقی است؟	۱/۲۵												
۲	تابع f با ضابطه $f(x) = mx^3 + nx + 1$ ، $-1 \leq x \leq 1$ مفروض است. مقادیر n, m را چنان بیابید که مقدار مشتق تابع معکوس f در نقطه‌ی $(1, 1)$ واقع بر f^{-1} برابر $\frac{1}{3}$ شود.	۱/۵												
۳	مردی با قد ۱۸۰ سانتی متر، با سرعت ۴۰ سانتی متر در ثانیه در خیابانی افقی به طرف تیر چراغی حرکت می کند که ارتفاع آن ۵ متر است. طول سایه این فرد با چه سرعتی تغییر می کند؟	۱/۲۵												
۴	نمودار $f(x) = x[x]$ را در بازه‌ی $[-2, 1]$ رسم کنید، سپس با توجه به نمودار، نقاط ماکسیمم نسبی و می نیمم نسبی تابع f را تعیین کنید.	۱/۵												
۵	شرایط قضیه مقدار میانگین را برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ روی بازه‌ی $[0, 2]$ بررسی کنید و در صورت امکان مقدار مناسبی برای c بیابید که در حکم این قضیه صدق کند.	۲												
۶	a, b را چنان تعیین کنید که $A(1, 3)$ نقطه‌ی عطف نمودار $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$ باشد.	۱/۷۵												
۷	جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ را رسم کنید.	۲												
۸	با استفاده از دیفرانسیل، مقدار تقریبی $\cos 28^\circ$ را محاسبه کنید.	۱/۵												
۹	ثابت کنید برای هر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ، $\sin x < \tan x$.	۱												
۱۰	سرعت ماشینی در طی ۴ ثانیه اول حرکتش به تدریج افزایش می یابد و در لحظات مختلف داریم: <table><tr><td>زمان (ثانیه)</td><td>۰</td><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>سرعت (متر بر ثانیه)</td><td>۰</td><td>۱۰</td><td>۲۰</td><td>۲۵</td><td>۳۰</td></tr></table> مطلوب است تقریب اضافی و نقصانی برای مسافتی که ماشین در عرض این ۴ ثانیه طی می کند؟	زمان (ثانیه)	۰	۱	۲	۳	۴	سرعت (متر بر ثانیه)	۰	۱۰	۲۰	۲۵	۳۰	۱/۲۵
زمان (ثانیه)	۰	۱	۲	۳	۴									
سرعت (متر بر ثانیه)	۰	۱۰	۲۰	۲۵	۳۰									
«ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم»														

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۸ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
دوره‌ی پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۴ / ۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۹-۱۳۸۸		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات	نمره
۱۱	قضیه: اگر f, g دو تابع انتگرال پذیر در بازه‌ی $[a, b]$ باشند، آنگاه $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$	۰/۷۵
۱۲	بدون محاسبه انتگرال، کران بالا و پایینی برای $\int_0^3 (x^2 - 4x + 3) dx$ بیابید.	۱/۵
۱۳	حاصل حد زیر را بیابید. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} t dt}{x^4}$	۱
۱۴	حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید. الف) $\int \frac{\sqrt[3]{x+3}}{x} dx, x \neq 0$ ب) $\int_{-1}^1 x \sqrt{x^2 + 2} dx$	۰/۷۵ ۱
۲۰	دانلود نمونه سوالات از سایت ریاضی سرا «موفق باشید» www.riazisara.ir جمع نمره	

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۸ صبح
دوره‌ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۴ / ۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۱۳۸۸-۸۹	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad (*)$ $2x - y - xy' + 2yy' = 0 \quad (./5) \xrightarrow{y'=0} y = 2x \quad (**) \quad (./25)$ $(*), (**) \Rightarrow x^2 - x(2x) + (2x)^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1 \quad (./25)$ $\Rightarrow \text{نقاط } A(1, 2), B(-1, -2) \quad (./25)$	۱/۲۵
۲	$(10, 1) \in f^{-1} \Rightarrow (1, 10) \in f \quad (./25) \Rightarrow m + n = 9 \quad (*) \quad (./25)$ $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3m+n} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3m + n = 3 \quad (./25) \quad (**)$ $(*), (**) \Rightarrow m = -3, n = 12 \quad (./25)$	۱/۵
۳	$\frac{y}{x+y} = \frac{180}{500} \quad (./25) \Rightarrow y = \frac{9}{16}x \quad (./25)$ $y'(t) = y'(x) \cdot x'(t) = \frac{9}{16} \times (-40) = \frac{-90}{4} = -22.5 \left(\frac{cm}{s} \right) \quad (./25)$  <p style="text-align: center;">(./25)</p>	۱/۲۵
۴	$f(x) = x[x], \quad [-2, 1]$  <p>نقطه‌ی $(0, 0)$، نقطه‌ی می نیمم نسبی تابع است. (./25)</p> <p>و برای هر $0 < x < 1$، تابع هم دارای ماکسیمم نسبی و هم دارای می نیمم نسبی است. (./5)</p>	۱/۵
	« ادامه در صفحه‌ی دوم »	

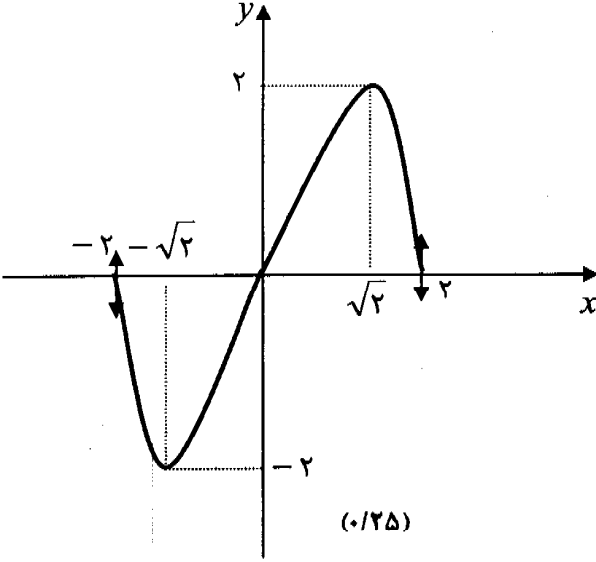
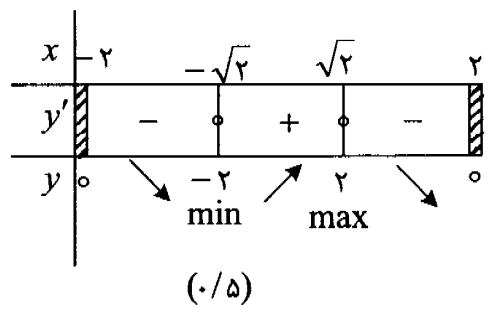
راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۸ صبح
دوره‌ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۴ / ۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۱۳۸۸-۸۹	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

۵	<p>با توجه به این که f در بازه $[۰, ۲]$ پیوسته است $(۰/۲۵)$، کافی است مشتق پذیری f را در بازه $(۰, ۲)$ بررسی کنیم.</p> $f'_+(۱) = f'_-(۱) = ۳ \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲, & ۰ < x < ۱ \\ ۳, & x = ۱ \\ ۲x + ۱, & ۱ < x < ۲ \end{cases} \quad (۰/۵)$ <p>پس f بر $(۰, ۲)$ مشتق پذیر است و شرایط قضیه مقدار میانگین برای تابع f در بازه‌ی $[۰, ۲]$ برقرار است. $(۰/۲۵)$</p> $\exists c \in (۰, ۲), f'(c) = \frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۶ - ۱}{۲ - ۰} \quad (۰/۲۵)$ <p>دو حالت داریم:</p> $۰ < c \leq ۱ \Rightarrow ۳c^۲ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow c = +\sqrt{\frac{۵}{۶}} \quad (۰/۲۵), \quad c = -\sqrt{\frac{۵}{۶}} \quad (۰/۲۵)$ <p>غ ق ق</p> $۱ < c < ۲ \Rightarrow ۲c + ۱ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow c = \frac{۳}{۴} \quad (۰/۲۵)$ <p>غ ق ق</p>	۲
۶	<p>$y = \frac{ax+b}{x^۲+۱} \xrightarrow{A(۱,۳)} ۳ = \frac{a+b}{۲} \Rightarrow a+b=۶ \quad (*) \quad (۰/۲۵)$</p> $y' = \frac{-ax^۲ - ۲bx + a}{(x^۲+۱)^۲} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow y'' = \frac{(-۲ax - ۲b)(x^۲+۱) - ۲x(-ax^۲ - ۲bx + a)}{(x^۲+۱)^۳} \quad (۰/۲۵)$ $y''(۱) = ۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{-۴a + ۴b}{۸} = ۰ \Rightarrow a = b \quad (**) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow (*), (**) \Rightarrow a = b = ۳ \quad (۰/۵)$	۱/۷۵
۷	<p>تابع خطوط مجانب ندارد. $(۰/۲۵)$</p> $f(x) = x\sqrt{۴-x^۲} \quad D = [-۲, ۲] \quad (۰/۲۵)$ $f'(x) = \frac{۴-۲x^۲}{\sqrt{۴-x^۲}} \quad (۰/۲۵)$ $\begin{cases} f'(x) = ۰ \Rightarrow ۴-۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲} \in D \\ f'(x) \text{ تعریف نشده} \Rightarrow \sqrt{۴-x^۲} = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲ \in D \end{cases} \quad (۰/۲۵)$	۲
	«ادامه در صفحه‌ی سوم»	

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۸ صبح
دوره‌ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۴ / ۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۱۳۸۸-۸۹	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
------	---------------	------

	<p>$x=0 \Rightarrow y=0$, $y=0 \Rightarrow x=0$, ± 2 (۰/۲۵)</p>   <p>(۰/۲۵)</p>	
۱/۵	<p>$f(x) = \cos x$, $x_0 = 3^\circ$ (۰/۲۵) , $dx = \Delta x = -2^\circ = \frac{-2\pi}{180}$ (۰/۲۵)</p> <p>$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)dx$ (۰/۲۵)</p> <p>$\cos 28^\circ \approx \cos 3^\circ + (-\sin 3^\circ)(\frac{-\pi}{90})$ (۰/۵)</p> <p>$\cos 28^\circ \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180}$ (۰/۲۵)</p>	۸
۱	<p>$f(x) = \sin x$, $g(x) = \tan x$ هر دو در بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته و بر بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ مشتق پذیرند و</p> <p>$f(0) = g(0) = 0$ (۰/۵)</p> <p>همچنین داریم: (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(x) < g'(x)$</p> <p>$\begin{cases} f'(x) = \cos x < 1 \\ g'(x) = 1 + \tan^2 x > 1 \end{cases}$</p> <p>در نتیجه بنابر قضیه کتاب: $f(x) < g(x)$ یعنی $\sin x < \tan x$ (۰/۲۵)</p> <p>« ادامه در صفحه‌ی چهارم »</p>	۹

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۸ صبح
دوره‌ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۸۹ / ۴ / ۲	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی دوم سال تحصیلی ۸۹-۱۳۸۸	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۰	$n = 4, \Delta x = 1 \quad (۰/۲۵)$ $L_f(f) = \sum_{i=1}^4 f(l_i) \Delta x = (0 + 10 + 20 + 25)1 = 55 \quad (۰/۵)$ (مسافت طی شده با تقریب نقصانی بر حسب متر) $U_f(f) = \sum_{i=1}^4 f(u_i) \Delta x = (10 + 20 + 25 + 30)1 = 85 \quad (۰/۵)$ (مسافت طی شده با تقریب اضافی بر حسب متر)	۱/۲۵
۱۱	قضیه کتاب (۰/۷۵)	-۰/۷۵
۱۲	$f(x) = x^2 - 4x + 3, [0, 3] \Rightarrow f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad (۰/۲۵)$ $f(0) = 3, f(2) = -1, f(3) = 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow m = -1 \quad (۰/۲۵), M = 3 \quad (۰/۲۵)$ $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (۰/۲۵) \Rightarrow -3 \leq \int_0^3 (x^2 - 4x + 3) dx \leq 9 \quad (۰/۲۵)$	۱/۵
۱۳	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x^2} t dt}{x^4} = \frac{0}{0} \quad (۰/۲۵) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x \cos x^2) \sin x^2}{4x^3} \quad (۰/۵)$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2}{2} \times \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$	۱
۱۴	الف) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + 3}{x} dx = \int (x^{-\frac{2}{3}} + 3x^{-1}) dx \quad (۰/۲۵) = 3\sqrt[3]{x} + 3 \ln x + C \quad (۰/۵)$ ب) $\int_{-1}^1 x \sqrt{x^2 + 2} dx = 2 \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 2} dx = 2 \int_0^1 x \sqrt{x^2 + 2} dx \quad (۰/۲۵)$ $\stackrel{(*)}{=} \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + 2)^3} \Big _0^1 = 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (۰/۲۵)$ $\begin{cases} u = x^2 + 2 \\ du = 2x dx \end{cases} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \int 2x \sqrt{x^2 + 2} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} \sqrt{u}^3 + C \quad (*) \quad (۰/۲۵)$	-۰/۷۵
۲۰	جمع نمره	همکاران محترم، لطفاً برای راه حل های درست دیگر بارم را به تناسب منظور فرمایید.