باسمه تعالی

سوالات امتحان نهایی درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)**	رشته: **علوم ریاضی**	ساعت شروع: **۸/۳۰ صبح**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
پیش دانشگاهی			تاریخ امتحان : **۱۳۹۰/ ۱۲/ ۱۰**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)			**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	سوالات	نمره
۱	تابع $f(x)=\sqrt{x^3+1}$ را در نظر بگیرید. معادله ی خط مماس در نقطه ی A' به طول ۳ واقع بر f^{-1} را بنویسید.	۱/۵
۲	نقطه ی M روی مسیر $3x^2-y^2+2xy=3$ در حرکت است. هنگامی که M در نقطه ی $(1,2)$ قرار دارد، اگر x با سرعت ۲ متر بر ثانیه کاهش یابد، y با چه سرعتی تغییر می کند؟	۱
۳	مشتق پذیری تابع $f(x)=x\|x\|$ و مشتق دوم آن را در نقطه ی $x=0$ بررسی کنید.	۱/۵
٤	نقاط ماکسیمم ومینیمم مطلق تابع $y=x+\frac{4}{x}$ را در بازه ی $[-3,-1]$ تعیین کنید.	۱/۷۵
۵	با استفاده از قضیه ی رول ثابت کنید معادله ی $x^3+x+1=0$ فقط یک ریشه دارد.	۱/۵
٦	با زه هایی که تابع $y=x\sqrt{4-x^2}$ بر آن ها صعودی یا نزولی است را تعیین کنید.	۲/۲۵
۷	در تابع $f(x)=x^3+9x^2+1$ جهت تقعر و نقطه ی عطف را در صورت وجود پیدا کنید.	۱/۵
۸	جدول تغییرات و نمودار تابع $y=\frac{\cos x}{1+\cos x}$ را در بازه ی $[0,2\pi]$ رسم کنید.	۲
۹	با استفاده از قاعده ی هوپیتال حد زیر را محاسبه کنید. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}$$	۱
۱۰	مجموع بالای ریمان را برای تابع $f(x)=x^2+1$ روی بازه ی $[0,1]$ بیابید.	۱/۲۵
۱۱	ثابت کنید اگر f در بازه ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن گاه عدد حقیقی c، $a\le c\le b$ وجود دارد که $\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$.	۱
۱۲	اگر f تابعی انتگرال پذیر و فرد باشد و بدانیم $\int_3^5 f(x)\,dx=4$ ، مطلوبست $\int_{-3}^5 (f(x)+1)\,dx$.	۱
۱۳	اگر مقدار متوسط تابع $f(x)=2x+1$ در بازه ی $[a,2]$ برابر ۳ باشد، مقدار a را به دست آورید.	۱/۲۵
١٤	انتگرال زیر را محاسبه کنید. $$\int_0^2 (x^{2[x]}+1)\,dx$$	۱/۵
	موفق باشید. جمع نمره	۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۱۰ / ۱۲ / ۱۳۹۰**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱ (نمره: ۱/۵)

$$(۳,a)\in f^{-۱}\Rightarrow (a,۳)\in f\ \Rightarrow \sqrt{a^{۳}+۱}=۳\Rightarrow a=۲\ (۰/۲۵)$$

$$f'(x)=\frac{۳x^{۲}\ (۰/۲۵)}{۲\sqrt{x^{۳}+۱}\ (۰/۲۵)}\Rightarrow f'(۲)=۲\ (۰/۲۵)\quad (f^{-۱})'(۳)=\frac{۱}{f'(۲)}=\frac{۱}{۲}\ (۰/۲۵)\quad \underbrace{y-۲=\frac{۱}{۲}(x-۳)}_{(۰/۲۵)}$$

۲ (نمره: ۱)

$$\underbrace{۶x\frac{dx}{dt}-۲y\frac{dy}{dt}+۲y\frac{dx}{dt}+۲x\frac{dy}{dt}=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\underbrace{(۶x+۲y)\frac{dx}{dt}+(۲x-۲y)\frac{dy}{dt}}_{(۰/۲۵)}=۰\Rightarrow\underbrace{(۱۰\times(-۲))-۲\frac{dy}{dt}=۰}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=-۱۰\ (۰/۲۵)$$

۳ (نمره: ۱/۵)

$$f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\ge ۰\\ -x^{۲} & x<۰\end{cases}\qquad f'_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{x^{۲}-۰}{x-۰}=۰\ (۰/۲۵)\qquad f'_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-x^{۲}-۰}{x-۰}=۰\ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۲x & x<۰\end{cases}\ (۰/۲۵)$$

$$f''_{+}(۰)=\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{۲x-۰}{x-۰}=۲\ (۰/۲۵)\ ,\quad f''_{-}(۰)=\lim_{x\to ۰^{-}}\frac{-۲x-۰}{x-۰}=-۲\ (۰/۲۵)$$

مشتق دوم در نقطه ی صفر وجود ندارد (۰/۲۵)

۴ (نمره: ۱/۷۵)

$$f'(x)=۱-\frac{۴}{x^{۲}}\ (۰/۲۵)\ \Rightarrow\ f'(x)=۰\Rightarrow \begin{array}{l}x=۲\ \text{غ ق ق}\ (۰/۲۵)\\ x=-۲\end{array}\quad\Rightarrow\begin{cases}f(-۳)=-\frac{۱۳}{۳}\ (۰/۲۵)\\ f(-۲)=-۴\ (۰/۲۵)\\ f(-۱)=-۵\ (۰/۲۵)\end{cases}$$

تابع در $x=-۲$ ماکسیمم مطلق (۰/۲۵) و در $x=-۱$ مینیمم مطلق دارد. (۰/۲۵)

۵ (نمره: ۱/۵)

$f(x)=x^{۳}+x+۱$ تابعی پیوسته است (۰/۲۵). چون $f(۰)=۱\ ,\ f(-۱)=-۱$ (۰/۲۵)، طبق قضیه ی مقدار میانی حداقل یک ریشه در بازه ی $(-۱,۰)$ دارد (۰/۲۵). اگر f دو ریشه مانند $x_{۱}$ و $x_{۲}$ داشته باشد که $x_{۲}>x_{۱}$ و $f(x_{۲})=f(x_{۱})=۰$ ، طبق قضیه ی رول $\exists\, c\in(x_{۱},x_{۲})\ \ni f'(c)=۰$ (۰/۲۵). از طرفی $f'(x)=۳x^{۲}+۱\neq ۰$ (۰/۲۵). پس فرض خلف باطل و معادله فقط یک ریشه دارد. (۰/۲۵)

۶ (نمره: ۲/۲۵)

x	$-\infty$	-۲		$-\sqrt{۲}$		$\sqrt{۲}$		۲	$+\infty$
y'			$-$	۰	$+$	۰	$-$		
y		۰	$\searrow$	-۲	$\nearrow$	۲	$\searrow$	۰	

(۰/۵)

$$D_{f}=[-۲,۲]\ \ (۰/۲۵)\qquad f'(x)=\underbrace{\sqrt{۴-x^{۲}}}_{(۰/۲۵)}+x\times\frac{-۲x}{\underbrace{۲\sqrt{۴-x^{۲}}}_{(۰/۲۵)}}=۰\Rightarrow x=\pm\sqrt{۲}\ \ (۰/۲۵)$$

تابع در بازه ی $[-\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$ صعودی (۰/۲۵) و در بازه های $[-۲,-\sqrt{۲}]$, $[\sqrt{۲},۲]$ نزولی (۰/۵) است.

ادامه در برگه ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۲)**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : **۱۲۰قیقه**
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : **۱۳۹۰ / ۱۲ / ۱۰**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در جبرانی اول (اسفند ماه ۱۳۹۰)		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۷

$$y' = ۳x^{۲} + ۱۸x \quad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{y'' = ۶x + ۱۸}_{(۰/۲۵)} = ۰ \Rightarrow x = -۳ \ (۰/۲۵)$$

نقطه ی عطف $(-۳,۵۵)$ $(۰/۲۵)$

x	$-\infty$	-۳	$+\infty$
y''	$-$	۰	$+$
y	$\cap$	۵۵	$\cup$

(۰/۵)

۱/۵

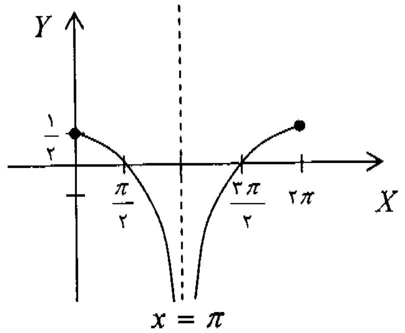
۸

$۱+\cos x = ۰ \Rightarrow x = \pi$ **مجانب قائم (۰/۲۵)**

$$y' = \frac{-\sin x}{(۱+\cos x)^{۲}} = ۰ \ (۰/۵) \Rightarrow x = ۰, \pi, ۲\pi \ (۰/۲۵)$$

x	۰		π		۲π
y'	۰	$-$		$+$	۰
y	$\frac{۱}{۲}$	$\searrow$	$-\infty \vert -\infty$	$\nearrow$	$\frac{۱}{۲}$

(۰/۵)



(۰/۵)

۲

۹

$$H: \lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} \frac{(-\sqrt{۲}\sin x)\ (۰/۲۵)}{-۲\tan x\ (۱+\tan^{۲} x)\ (۰/۵)} = \frac{۱}{۴} \ (۰/۲۵)$$

۱

۱۰

$\Delta x = \frac{۱}{n}$ $(۰/۲۵)$, $x_i = \frac{i}{n}$ $(۰/۲۵)$

$$U_n(f) = \frac{۱}{n}\underbrace{((\frac{۱}{n})^{۲}+۱+(\frac{۲}{n})^{۲}+۱+\cdots+(\frac{n}{n})^{۲}+۱)}_{(۰/۲۵)} = \frac{۱}{n}(\frac{۱+۴+\cdots+n^{۲}}{n^{۲}}+n) = \frac{۱}{n}(\underbrace{\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶n^{۲}}}_{(۰/۲۵)}+n) = \frac{۸n^{۲}+۳n+۱}{۶n^{۲}} \ (۰/۲۵)$$

۱/۲۵

۱۱

چون $\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ **بین دو مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع است (۰/۲۵)، بنابر قضیه ی مقدار میانی** $\exists c \in [a,b]$ $(۰/۲۵)$ **که**

$$f'(c) = \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx \ (۰/۵).$$

۱

۱۲

چون f **فرد است،** $\underbrace{\int_{-۳}^{۳} f(x)dx = ۰}_{(۰/۲۵)}$ **. لذا**

$$\int_{-۳}^{۵}(f(x)+۱)dx = \underbrace{\int_{-۳}^{۵} f(x)dx + \int_{-۳}^{۵} dx}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\int_{-۳}^{۳} f(x)dx + \int_{۳}^{۵}(f(x)dx + ۸}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۱۲}_{(۰/۲۵)}$$

۱

۱۳

$$۲ = \frac{۱}{۲-a}\int_a^{۲}(۲x+۱)dx \ (۰/۲۵) \Rightarrow ۶-۳a = x^{۲}+x\Big|_a^{۲} = ۶-(a^{۲}+a) \ (۰/۲۵)$$

$a^{۲} - ۲a = ۰$ $(۰/۲۵)$ $\Rightarrow a = ۲$ غ ق ق $(۰/۲۵)$, $a = ۰$ $(۰/۲۵)$

۱/۲۵

۱۴

$$\underbrace{\int_{۰}^{۱}(x^{۲[x]}+۱)\,dx + \int_{۱}^{۲}(x^{۲[x]}+۱)\,dx}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\int_{۰}^{۱} ۲\,dx}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{\int_{۱}^{۲}(x^{۲}+۱)\,dx}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۲}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{(\frac{۱}{۳}x^{۳}+x)\Big|_{۱}^{۲}}_{(۰/۲۵)} = \frac{۱۶}{۳} \ (۰/۲۵)$$

۱/۵

همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر

۲۰