

سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۱۰/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
پیش دانشگاهی			
دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۱		مرکز سنجش آموزش و پرورش	تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۳/۶
ردیف		سؤالات	نمره

۱	جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. الف) اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $\varepsilon < 2x - 3 \leq 0$ ، مقدار $x$ برابر با ----- است. ب) مرکز بازه‌ی $(-5, 3) \cap (-6, 1)$ برابر با ----- می باشد. ج) سری $\sum_{k=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ به عدد ----- همگراست. د) مقدار عددی $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 4}{(x+1)(x^2-1)}$ برابر با ----- است.	۱
۱/۲۵	با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها، ثابت کنید دنباله‌ی $\{\sqrt{2}n\}$ واگراست.	۲
۱/۵	بدون استفاده از هم ارزی، مجانب مایل تابع $y = \sqrt{x^2 + 1} - x$ را به دست آورید.	۳
۱/۲۵	تابع $f(x) = (x^2 - x)^{\frac{2}{3}}$ در چه نقاطی مشتق پذیر است؟	۴
۱/۷۵	تابع $f(x) = x^3 + x$ مفروض است. از نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر نمودار تابع معکوس $f$ خط مماسی بر نمودار $f^{-1}$ رسم می کنیم. شیب خط مماس را محاسبه کنید.	۵
۱/۲۵	اگر ذره‌ای روی مسیر $\frac{xy^2}{1+y^2} = \frac{4}{5}$ حرکت کند و مولفه‌ی $x$ آن با سرعت ۴ متر بر ثانیه افزایش یابد، هنگامی که ذره در نقطه‌ی $(1, 2)$ قرار دارد، مولفه‌ی $y$ با چه سرعتی در حال تغییر است؟	۶
۲	در صورت وجود، مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ را در دامنه‌ی آن تعیین کنید.	۷
۱/۵	مقادیر $a$ و $b$ را چنان بیابید که نقطه‌ی $(1, 2)$ نقطه‌ی عطف تابع $y = ax^3 + bx^2 + 4$ باشد.	۸
۲	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 - 1}$ را رسم کنید.	۹
۱	با استفاده از قاعده‌ی هوییتال حد زیر را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x}$	۱۰
۱	مقدار تقریبی $\text{Arctan}(1/2)$ را بیابید.	۱۱
۱/۵	مجموع بالای ریمان را برای $y = 1 - x^3$ در بازه‌ی $[-1, 1]$ و برای $n = 4$ بدست آورید.	۱۲
۰/۷۵	بدون محاسبه‌ی انتگرال، مشتق زیر را پیدا کنید. $\frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{1}{1 + \sqrt{t}} dt$	۱۳
۲/۲۵	انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید. الف) $\int_0^3  [x] - 2  dx$ ب) $\int \frac{x^3 + 2}{x^2} dx$	۱۴
۲۰	موفق باشید.	جمع نمره

باسمه تعالی

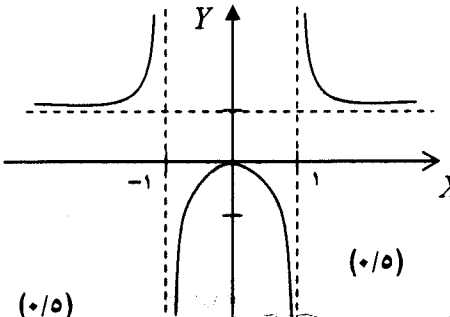
راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان : ۱۳۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۱ / ۳ / ۶	
دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش <a href="http://aee.medu.ir">http://aee.medu.ir</a>	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	الف) $\frac{3}{2}$ (۰/۲۵)    ب) $-2$ (۰/۲۵)    ج) $1$ (۰/۲۵)    د) $-3$ (۰/۲۵)	۱										
۱/۲۵	فرض کنیم دنباله‌ی $\{\sqrt{2n}\}$ همگرا به عدد $L$ باشد. برای $\varepsilon = 1$ داریم: $\exists M \in \mathbb{N}, \forall n \geq M \quad  \sqrt{2n} - L  < 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \sqrt{2n} -  L  < 1 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \sqrt{2n} < 1 +  L  \quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow 0 < n < \frac{(1+ L )^2}{2} \quad (۰/۲۵)$ نتیجه‌ی نامساوی مثلثی و این با از بالا بی کران بودن مجموعه‌ی اعداد طبیعی تناقض دارد. (۰/۲۵)	۲										
۱/۵	$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ x  - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} = -2 \quad (۰/۲۵)$ $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) \times \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} \quad (۰/۲۵)$ $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{ x  - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-2x} = 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow y = -2x \quad (۰/۲۵) \quad \text{مجانِب مایل}$	۳										
۱/۲۵	$f'(x) = \frac{3}{4}(2x-1)(x^2-x)^{-\frac{1}{4}} = \frac{3(2x-1)}{4\sqrt[4]{x^2-x}} \quad (۰/۲۵)$ $x^2 - x > 0 \quad (۰/۲۵)$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x</math></td> <td><math>-\infty</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>1</math></td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>x^2 - x</math></td> <td><math>+</math></td> <td><math>0</math></td> <td><math>-</math></td> <td><math>+</math></td> </tr> </table> <p style="text-align: center;">(۰/۲۵) نقاط مشتق پذیری: <math>(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)</math> (۰/۲۵)    (۰/۲۵)</p>	$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	$x^2 - x$	$+$	$0$	$-$	$+$	۴
$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$								
$x^2 - x$	$+$	$0$	$-$	$+$								
۱/۷۵	$x^2 + x = 2 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \quad (۰/۲۵)$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 2 \neq 0 \quad (\Delta < 0) \quad (۰/۲۵) \\ x = 1 \quad (۰/۲۵) \end{cases} \Rightarrow (2, 1) \in f^{-1}$ $f'(x) = 3x^2 + 1 \quad (۰/۲۵), \quad f'(1) = 4 \Rightarrow \underbrace{(f^{-1})'(2)}_{(۰/۲۵)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4} \quad (۰/۲۵)$	۵										
۱/۲۵	$5xy^2 - 4 - 4y^2 = 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 5y^2 \frac{dx}{dt} + 10xy \frac{dy}{dt} - 4y \frac{dy}{dt} = 0 \quad (۰/۵)$ $\Rightarrow 10 + 20 \frac{dy}{dt} - 16 \frac{dy}{dt} = 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -20 \quad (۰/۲۵)$	۶										

ادامه در صفحه‌ی دوم

ادامه در صفحه‌ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۳/۶
دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در خرداد ماه سال ۱۳۹۱		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۲	$D_f = [-۳, ۳] \quad (۰/۲۵)$ $f(-۳) = ۰ \quad (۰/۲۵)$ مینیمم مطلق $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۹-x^2}} = ۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۳ \quad (۰/۲۵)$ ماکسیمم مطلق $f(۳) = ۰ \quad (۰/۲۵)$ مینیمم مطلق	۷																		
۱/۵	$f'(x) = ۳ax^2 + ۲bx \quad (۰/۲۵)$ , $f''(x) = ۶ax + ۲b \quad (۰/۲۵)$ , $f''(۱) = ۰ \Rightarrow ۳a + b = ۰ \quad (۰/۲۵)$ $f(۱) = ۲ \Rightarrow a + b = -۲ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a = ۱ \quad (۰/۲۵)$ , $b = -۳ \quad (۰/۲۵)$	۸																		
۲	$\begin{cases} x \rightarrow \pm ۱ \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = \pm ۱$ مجانب های قائم $(۰/۲۵)$ $\begin{cases} x \rightarrow \pm \infty \\ y \rightarrow ۱ \end{cases} \Rightarrow y = ۱$ مجانب افقی $(۰/۲۵)$ $y' = \frac{-۲x}{(x^2-1)^2} = ۰ \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{f'(x)=0} x = ۰ \quad (۰/۲۵)$ <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>-۱</td> <td>۰</td> <td>۱</td> <td><math>+\infty</math></td> </tr> <tr> <td>y'</td> <td></td> <td>+</td> <td>+</td> <td>-</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>۱</td> <td><math>+\infty</math></td> <td>۰</td> <td><math>-\infty</math></td> <td>۱</td> </tr> </table> 	x	$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$	y'		+	+	-	-	y	۱	$+\infty$	۰	$-\infty$	۱	۹
x	$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$															
y'		+	+	-	-															
y	۱	$+\infty$	۰	$-\infty$	۱															
۱	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2} \sin x \quad (۰/۲۵)}{x - \frac{\pi}{4} - ۲ \tan x (1 + \tan^2 x) \quad (۰/۵)} = \frac{۱}{۴} \quad (۰/۲۵)$	۱۰																		
۱	$f(x) = \text{Arc tan } x$ , $x = ۱$ , $\Delta x = ۰/۲ \quad (۰/۲۵)$ , $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (۰/۲۵)$ $f(x + \Delta x) \approx f(x) + \Delta x f'(x) \Rightarrow \text{Arc tan}(1/۲) \approx \text{Arc tan } ۱ + ۰/۲ \times \frac{1}{1+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{۱۰} \quad (۰/۲۵)$	۱۱																		
۱/۵	$\Delta x = \frac{1}{۲} \quad (۰/۲۵) \Rightarrow U_n(f) = \frac{1}{۲} (f(-۱) + f(-\frac{1}{۲}) + f(۰) + f(\frac{1}{۲})) = \frac{1}{۲} (۲ + \frac{۹}{۸} + ۱ + \frac{۷}{۸}) = \frac{۵}{۲} \quad (۰/۲۵)$ (*) (۱) (در صورتی که به جای (*) جدول محاسبات نیز آورده شد بارم مورد نظر داده شود.)	۱۲																		
۰/۷۵	$-(\frac{d}{dx} \int_1^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt) = - \frac{2x}{1+\sqrt{x^2}} \times \frac{1}{1+\sqrt{x^2}} = \frac{-2x}{1+ x } \quad (۰/۲۵)$	۱۳																		
۲/۲۵	الف) $\int_0^1  x-۲  dx + \int_1^2  x-۲  dx + \int_2^3  x-۲  dx = \int_0^1 dx + \int_1^2 dx + ۰ = 2x \Big _0^1 + ۱ = ۳ \quad (۰/۲۵)$ ب) $\int (x + \frac{۲}{x^2}) dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{۲}{x} + c \quad (۰/۲۵)$	۱۴																		