

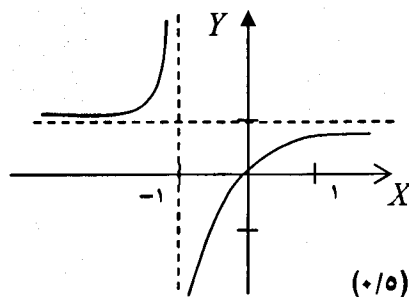
سؤالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۹ صبح	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
پیش دانشگاهی			
دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱			
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir			
ردیف	سؤالات (پاسخنامه دارد)		
	نمره		

۱	اشتراک دو بازه‌ی $(-۱, ۶)$ و $(-۲, ۴)$ را به صورت یک همسایگی متقارن نوشته و مرکز و شعاع آن را تعیین کنید.	۰/۷۵
۲	دنباله‌ی $\{\cos \frac{\pi}{n}\}$ را در نظر بگیرید. با ارائه‌ی دلیل به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) کرانداری دنباله‌ی فوق را بررسی کنید. ب) آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n}$ همگراست؟	۱/۲۵
۳	مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع رو به رو در $x=1$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} b[x] + 3 & x > 1 \\ 6 & x = 1 \\ \frac{3a(x-1)}{x^2 - 1} & x < 1 \end{cases}$	۱/۵
۴	کلیدی مجانب‌های تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ را تعیین کنید.	۱/۵
۵	فرض کنید $f'(2) = \frac{3}{2}$. مشتق $g(x) = f(\frac{1}{x})$ را در $x = \frac{1}{2}$ محاسبه کنید.	۱
۶	معادله‌ی خط مماس بر منحنی $x^4 + 16y^4 = 32$ را در نقطه‌ی $(2, -1)$ بنویسید.	۱
۷	نقطه‌ی M روی مسیر $f(x) = \sqrt{3x^2 + 1}$ در حال حرکت است. هنگامی که M در نقطه‌ی $(1, 2)$ قرار دارد، اگر مولفه‌ی y آن با سرعت ۶ متر بر ثانیه افزایش یابد، مولفه‌ی x با چه سرعتی تغییر می‌کند؟	۱
۸	مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ را در بازه‌ی $[-1, \frac{1}{2}]$ در صورت وجود بیابید.	۲
۹	برای تابع $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ در بازه‌ی $[1, 3]$ شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط قضیه، مقدار یا مقادیر مناسبی برای c بیابید.	۲
۱۰	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x}{x+1}$ را رسم کنید.	۲
۱۱	با استفاده از قاعده‌ی هوییتال حد رو به رو را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x}{\tan 2x}$	۱/۵
۱۲	با استفاده از حد مجموع بالای ریمان، مقدار $\int_0^1 2x \, dx$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۳	بدون محاسبه‌ی انتگرال، مشتق $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{t}{2 + \sqrt{t}} \, dt$ را پیدا کنید.	۰/۷۵
۱۴	مقدار متوسط تابع $y = x - \frac{1}{x^2}$ را در بازه‌ی $[1, 3]$ بیابید.	۱
۱۵	انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید. الف) $\int \frac{3x^2 - x}{x} \, dx$ ب) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$	۱/۲۵

مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه	رشته: علوم ریاضی	راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال
تاریخ امتحان: ۱۳۹۱/۵/۳۱	پیش دانشگاهی	
مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱	
نمره	راهنمای تصحیح	ردیف

۰/۷۵	$(-۲, ۴) \cap (-۱, ۶) = (-۱, ۴)$ (۰/۲۵) , $a = \frac{۳}{۲}$ (۰/۲۵) , $r = \frac{۵}{۲}$ (۰/۲۵)	۱
۱/۲۵	الف) دنباله کراندار است (۰/۲۵) زیرا $ \cos \frac{\pi}{n} \leq ۱$ (۰/۲۵) ب) سری واگراست (۰/۲۵) زیرا $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{n} = \cos 0 = ۱ \neq ۰$ (۰/۲۵)	۲
۱/۵	$f(۱) = ۶$ (۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow ۱^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۱^-} \frac{۳a(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)} = \frac{۳a}{۲} = ۶$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a = ۴$ (۰/۲۵) $\lim_{x \rightarrow ۱^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۱^+} b + ۳ = ۶$ (۰/۲۵) $\Rightarrow b = ۳$ (۰/۲۵)	۳
۱/۵	مجانِب قائم $x = ۱$ (۰/۲۵) $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ۱}{x(x-۱)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = ۱$ (۰/۲۵) , $b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ۱}{x-۱} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{۱+x}{x-۱} = ۱$ (۰/۲۵) مجانِب مایل $y = x + ۱$ (۰/۲۵)	۴
۱	$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'(\frac{1}{x})$ $x = \frac{1}{2}$ $= -\frac{1}{4} f'(2) = -۶$ (۰/۲۵)	۵
۱	$\frac{dy}{dx} = \frac{-(4x^2)}{16 \times 4y^2} = \frac{-x^2}{16y^2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow y + ۱ = \frac{1}{2}(x - 2)$ (۰/۲۵)	۶
۱	$y'(t) = \frac{۶x x'(t)}{۲\sqrt{۳x^2 + ۱}}$ $\xrightarrow{(۱, ۲)}$ $۶ = \frac{۶ \times ۱ \times x'(t)}{۴}$ $\Rightarrow x'(t) = ۴ \frac{m}{s}$ (۰/۲۵)	۷
۲	$f'(x) = \frac{x^2 - ۲x}{(x-۱)^2} = ۰ \Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۲$ غ ق (۰/۲۵) $\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = f(-۱) = -\frac{1}{2}$ (۰/۵) (۰/۲۵) ماکسیمم مطلق $f(۰) = ۰$ (۰/۲۵) (۰/۲۵) مینیمم مطلق	۸
۲	f روی بازه $[۱, ۳]$ پیوسته (۰/۲۵) و روی $(۱, ۳)$ مشتق پذیر است (۰/۲۵). از طرفی $f'(x) = ۳x^2 - ۱۰x - ۳$ (۰/۲۵), $f(۳) = -۲۷$ (۰/۲۵) و $f(۱) = -۷$ (۰/۲۵). بنابر قضیه مقدار میانگین وجود دارد $c \in (۱, ۳)$ که $\left. \begin{aligned} c = ۱ \text{ غ ق (۰/۲۵)} \\ c = \frac{۷}{۳} \text{ ق ق (۰/۲۵)} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow ۳c^2 - ۱۰c + ۷ = ۰$ در نتیجه (۰/۲۵) $f'(c) = ۳c^2 - ۱۰c - ۳ = \frac{f(۳) - f(۱)}{۳ - ۱} = -۱۰$	۹

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۳۰ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان: ۱۳۹۱ / ۵ / ۳۱
دانش آموزان سالی واحدی (روزانه) سراسر کشور در مرداد ماه سال ۱۳۹۱		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۲	$\begin{cases} x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow x = -1 \text{ (۰/۲۵) } \quad \begin{cases} x \rightarrow \pm \infty \\ y \rightarrow 1 \end{cases} \Rightarrow y = 1 \text{ (۰/۲۵) } \text{ مجانب افقی}$ $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ (۰/۵)}$  <table border="1" data-bbox="177 648 826 837"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>y'</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr> <tr> <td>y</td><td>1</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr> </table> <p>(۰/۵)</p>	x	$-\infty$	-1	$+\infty$	y'	+	+	+	y	1	$+\infty$	$-\infty$	۱۰
x	$-\infty$	-1	$+\infty$											
y'	+	+	+											
y	1	$+\infty$	$-\infty$											
۱/۵	$H: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 1}{2(1 + \tan^2 2x)} = 1 \text{ (۰/۵)}$	۱۱												
۱/۵	$\Delta x = \frac{1}{n} \text{ (۰/۲۵)}$ $x_i = \frac{i}{n} \text{ (۰/۲۵)}$ $\Rightarrow U_n(f) = \sum_{i=1}^n \Delta x \times f(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times (2 \times \frac{i}{n}) = \frac{1}{n} \times (\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n i) = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{n}$ $\int_0^1 2x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \text{ (۰/۲۵)}$	۱۲												
۰/۷۵	$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{t}{2+\sqrt{t}} dt = \frac{2x}{2+ x } \times \frac{x^2}{2+ x }$ <p>(۰/۲۵) $\frac{2x}{2+ x }$ (۰/۵)</p>	۱۳												
۱	$\frac{1}{3-1} \int_1^3 (x - \frac{1}{x^2}) dx = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{x}) \Big _1^3 = \frac{5}{3} \text{ (۰/۲۵)}$ <p>(۰/۲۵) $\frac{1}{2}$ (۰/۲۵) $\frac{1}{x}$ (۰/۲۵)</p>	۱۴												
۱/۲۵	<p>الف) $\int (3x-1) dx = \frac{3}{2} x^2 - x + c$</p> <p>(۰/۲۵) $\frac{3}{2}$ (۰/۲۵) $-x$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) $2 \int \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \sin \sqrt{x} + c \text{ (۰/۲۵)}$</p> <p>(۰/۲۵)</p>	۱۵												
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، لطفا به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره داده شود. با سپاس و احترام													