باسمه تعالی

سوالات امتحان نهایی درس: **حساب دیفرانسیل و انتگرال**	رشته: **علوم ریاضی**	ساعت شروع: **۸/۳۰ صبح**	مدت امتحان : **۱۲۰ دقیقه**
پیش دانشگاهی			تاریخ امتحان : **۹ / ۱۰/ ۱۳۹۱**
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال ۱۳۹۱			**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	سوالات (پاسخنامه دارد)	نمره
۱	فرض کنیم برای هر عدد مثبت h ، $0 \le a < h$. ثابت کنید $a = 0$.	۱
۲	به کمک قضیه‌ی فشردگی، همگرایی دنباله‌ی $\{\frac{\cos n}{n}\}$ را نشان دهید.	۱
۳	مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی صفر پیوسته باشد. $$f(x)=\begin{cases} a+[x] & x<0 \\ b & x=0 \\ 3-x^2 & x>0 \end{cases}$$	۱/۲۵
٤	کلیه‌ی مجانب های تابع $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ را در صورت وجودبیابید.	۰/۷۵
۵	بادکنکی کروی شکل مملو از هوا، شعاعی برابر ۱۰سانتی متر دارد. اگر ۱ سانتی متر دیگر به شعاع آن افزوده شود، آهنگ تغییر حجم آن چقدر است؟	۱
٦	مشتق پذیری تابع $f(x)=\|\sin x\|$ را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.	۱/۵
۷	ضابطه‌ی تابع درجه‌ی دوم f را چنان بیابید که $f(-1)=-6$ ، $f'(-1)=4$ و $f''(-1)=-2$ باشد.	۱/۵
۸	شیب خط مماس بر منحنی $x^3+4x^2y-3y^3=0$ را در نقطه‌ی $(-1,1)$ بنویسید.	۱/۲۵
۹	تابع $f(x)=1+e^{2x}$ را در نظر بگیرید. مقدار $(f^{-1})'(2)$ را در صورت وجود بیابید.	۱
۱۰	مشتق تابع $g(x)=Ln(x+\sqrt{x})$ را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۱	الف) نقطه‌ی بحرانی را تعریف کنید. ب) نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ را در صورت وجود تعیین کنید.	۱/۵
۱۲	با اعمال آزمون مشتق دوم، مقادیر اکسترمم های موضعی تابع $f(x)=x^4-4x+1$ را در صورت وجود بیابید.	۱/۵
۱۳	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=x^3-3x+1$ را رسم کنید.	۲
۱٤	مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار $y=2x+1$ و خطوط $y=0$، $x=0$ و $x=2$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	ثابت کنید هر گاه f بر $[a,b]$ تابعی پیوسته باشد، نقطه ای مانند c از این بازه هست به قسمی که: $$\int_a^b f(x)\, x=(b-a)f(c)$$	۱
۱٦	انتگرال $\int_0^2 (x-[x])\,dx$ را محاسبه کنید.	۱/۵
	موفق باشید.	جمع نمره ۲۰

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : ۱۲۰قیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۹ / ۱۰/ ۱۳۹۱
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	**فرض خلف: فرض کنیم $a \neq 0$ (۰/۲۵).پس طبق فرض $0 < a < h$ (۰/۲۵). حال قرار می دهیم $h=\frac{a}{2}$ (۰/۲۵) که در این صورت داریم $0 < a < \frac{a}{2}$ و این تناقض است. (۰/۲۵)**	۱
۲	$-1 \le \cos n \le 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow -\frac{1}{n} \le \frac{\cos n}{n} \le \frac{1}{n}$ (۰/۲۵) , $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0$ (۰/۲۵)	۱
۳	$f(0)=b$ (۰/۲۵) , $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} a+[x]=a-1=3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a=4$ (۰/۲۵) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 3-x^2=3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow b=3$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
٤	**مجانب قائم $x=2$ (۰/۲۵). چون $f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$ (۰/۲۵) . بنابراین $y=x-1$ مجانب مایل است (۰/۲۵) .**	۰/۷۵
۵	$V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \frac{dV}{dr}=4\pi r^2$ (۰/۲۵) $\xrightarrow{r=10} \frac{dV}{dr}(10)=400\pi$ (۰/۵)	۱
٦	$f'_+(0)=\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{(0/25)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\lvert\sin x\rvert}{x}=\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}}_{(0/25)}=1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow$ (۰/۲۵) **مشتق پذیر نیست** $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-\sin x}{x}}_{(0/25)}=-1$ (۰/۲۵)	۱/۵
۷	$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b$ (۰/۲۵) , $f''(x)=2a$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f''(-1)=-2 \Rightarrow a=-1$ (۰/۲۵) $f'(-1)=4 \Rightarrow b=2$ (۰/۲۵) , $f(-1)=-6 \Rightarrow c=-3$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f(x)=-x^2+2x-3$ (۰/۲۵)	۱/۵
۸	$\underbrace{3x^2}_{(0/25)}+\underbrace{8xy}_{(0/25)}+\underbrace{4x^2y'}_{(0/25)}-\underbrace{9y^2y'}_{(0/25)}=0 \xrightarrow{x=-1\ ,\ y=1} y'=-1$ (۰/۲۵)	۱/۲۵
۹	$b=2 \Rightarrow 1+e^{2x}=2 \Rightarrow x=0$ (۰/۲۵) , $f'(x)=2e^{2x}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \underbrace{(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(0)}}_{(0/25)}=\frac{1}{2}$ (۰/۲۵)	۱
۱۰	$g'(x)=\frac{(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})\ (0/5)}{(x+\sqrt{x})\ (0/25)}$	۰/۷۵
۱۱	**الف) نقطه ی درونی c (۰/۲۵) را نقطه‌ی بحرانی نامیم هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد. (۰/۵)** **ب) در نتیجه $x=0$ بحرانی است. (۰/۲۵)** $D_f=[-2,2]$ (۰/۲۵) , $f'(x)\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(0)=0$	۱/۵

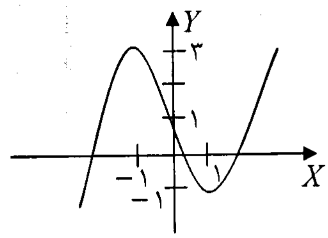
ادامه در برگه ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : **حساب دیفرانسیل و انتگرال**	رشته: **علوم ریاضی**	مدت امتحان : ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی		تاریخ امتحان : ۹ / ۱۰ / ۱۳۹۱
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱		**مرکز سنجش آموزش و پرورش** **http://aee.medu.ir**

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۲	$f'(x)=۴x^۳-۴(۰/۲۵)=۴(x^۳-۱)=۰\Rightarrow x=۱\ (۰/۲۵)\ ,\ f''(x)=۱۲x^۲(۰/۲۵)$ $f''(۱)=۱۲>۰\ (۰/۲۵)\Rightarrow x=۱$ **مینیمم موضعی** (۰/۲۵) **مقدار مینیمم موضعی** $f(۱)=-۲$ (۰/۲۵) .	۱/۵
۱۳	$f'(x)=۳x^۲-۳\ (۰/۲۵)\xrightarrow{f'(x)=۰}x=۱,-۱\ (۰/۲۵)$ $f''(x)=۶x\ (۰/۲۵)=۰\xrightarrow{f''(x)=۰}x=۰\ (۰/۲۵)$	۲

x	$-\infty$	-۱	۰	۱	$+\infty$
f'	+	۰	-	۰	+
f''	-	-	۰	+	+
f	$-\infty$ ↗	۳ ↘	۱ ↘	-۱ ↗	$+\infty$

(۰/۵)



(۰/۵)

ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱۴	$\Delta x=\frac{۲}{n}\ (۰/۲۵)\ ,\ x_i=\frac{۲i}{n}\ (۰/۲۵)\ ,\ f(x_i)=۲x_i+۱=\frac{۴i}{n}+۱\ (۰/۲۵)$ $S_n=\sum_{i=۱}^{n}(\frac{۴i}{n}+۱)\frac{۲}{n}=\frac{۲}{n}(\frac{۴}{n}\sum_{i=۱}^{n}i+\sum_{i=۱}^{n}۱)=\frac{۲}{n}\underbrace{(\frac{۴}{n}\times\frac{n(n+۱)}{۲}+n)}_{(۰/۲۵)}=\frac{۴(n+۱)}{n}+۲(۰/۲۵)$ $A=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\frac{۴(n+۱)}{n}+۲)=۶(۰/۲۵)$	۱/۵
۱۵	**می دانیم** $m<\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx<M$ **که در آن** M,m **به ترتیب مقادیر مینیمم و ماکسیمم مطلق تابع** f **بر بازه‌ی** $[a,b]$ **هستند (۰/۲۵). چون** f **پیوسته است (۰/۲۵) بنابر قضیه‌ی مقدار میانی (۰/۲۵) هر مقدار بین ماکسیمم و مینیمم خود را در نقطه ای مانند** $c\in[a,b]$ **می گیرد. لذا** $\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$ **(۰/۲۵) یا** $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$.	۱
۱۶	$\int_۰^۲(x-[x])dx=\underbrace{\int_۰^۱(x-[x])dx+\int_۱^۲(x-[x])dx}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\int_۰^۱ xdx}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{\int_۱^۲(x-۱)dx}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱}{۲}x^۲]_۰^۱}_{(۰/۲۵)}+\underbrace{(\frac{۱}{۲}x^۲-x)]_۱^۲}_{(۰/۲۵)}=۱\ (۰/۲۵)$	۱/۵
	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر	۲۰