

سوالات امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)		رشته: علوم ریاضی	ساعت شروع: ۸/۳۰ صبح	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی				
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۱۳۹۰-۹۱			مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	سوالات			نمره

۱	اگر برای هر عدد حقیقی $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $0 \leq x < \varepsilon$ ، ثابت کنید که $x = 0$	۱
۲	اگر مجموعه $A = \{x \mid y - 2x < 2\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r باشد، مقدار $a + r$ را تعیین کنید.	۱
۳	در دنباله $\left\{\frac{4n+1}{2n-5}\right\}$ برای چه مقادیر n ، $\frac{4n+1}{2n-5} < \frac{2}{0.1}$ می باشد؟	۱/۵
۴	ثابت کنید دنباله $\left\{2 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ غیر یکتا و همگراست.	۱/۵
۵	همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی نمایید و در صورت همگرایی، مجموع سری را محاسبه کنید. الف) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$ ب) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k-1}{3k}$ ج) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k+1}}{6^k}$	۲/۵
۶	با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-3}{x-1} = 6$	۱/۵
۷	ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ در نقطه $x = 0$ حد ندارد.	۱/۵
۸	حدود توابع زیر را بدون هم ارزی و قاعده ی هوییتال محاسبه کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-9) \times \cos \frac{1}{x-3}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-2}{x-3}$ ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{9x^2 - 4x + 1}}{6x - 1}$	۲/۲۵
۹	حدود m را طوری تعیین کنید که یکی از ریشه های معادله $mx^2 - 4x - 2m + 3 = 0$ در بازه $[-1, 1]$ باشد.	۱/۵
۱۰	نقاط ناپوستگی تابع زیر را تعیین کنید. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-6} & x < 5 \\ \sqrt{x-5} & x \geq 5 \end{cases}$	۰/۷۵
۱۱	معادله ی کلیه ی مجانب های منحنی $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ را بنویسید.	۱
۱۲	قضیه: اگر دو تابع f و g در نقطه ی a مشتق پذیر باشند، ثابت کنید: $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$	۱/۵
۱۳	مشتق پذیری تابع رو به رو را در $x = 1$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$	۱/۲۵
۱۴	اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$ ، $g'(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $F = g \circ f$ باشند، حاصل $F'(4)$ را تعیین کنید.	۱/۲۵
۲۰	موفق باشید.	جمع نمره

باسمه تعالی

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس: حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰/۱۰/۱۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۱	اگر $x = 0$ که حکم برقرار است (۰/۲۵). حال فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف) یعنی $x \neq 0$. لذا $x > 0$ چون عبارت برای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است، قرار می دهیم $\varepsilon = x$ (۰/۲۵). در نتیجه $0 < x < x = \varepsilon$ (۰/۲۵). که این تناقض است پس فرض خلف باطل است، یعنی $x = 0$ (۰/۲۵).	۱
۲	$ 7-3x < 2 \Rightarrow 2 < x - \frac{7}{3} < 2 \quad (0/25) \quad a = \frac{7}{3} \quad (0/25), \quad r = \frac{7}{3} \quad (0/25) \Rightarrow a+r=3 \quad (0/25)$	۲
۳	$\frac{1}{199} - 2 < \frac{2n+1}{2n-5} - 2 < 2/01 - 2 \quad (0/25) \Rightarrow -0/01 < \frac{11}{2n-5} < 0/01 \quad (0/25) \Rightarrow \left \frac{11}{2n-5} \right < 0/01 \quad (0/25)$ $\Rightarrow 2n-5 > 1100 \quad (0/25) \Rightarrow n > \frac{1105}{2} \quad (0/25) \Rightarrow n \geq 553 \quad (0/25)$	۳
۴	$\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad (0/25) \Rightarrow 2 - \frac{1}{n} \leq 2 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 2 + \frac{1}{n} \quad (0/25)$ دنباله همگراست $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2 \quad (0/25) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + \frac{(-1)^n}{n} = 2 \quad (0/25)$ $a_n: 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{9}{4}, \dots \quad (0/25) \Rightarrow$ دنباله غیر یکنواست (۰/۲۵)	۴
۵	الف) $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{(k^2+1)((k+1)^2+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{(k+1)^2+1} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)^2-1} \quad (0/25)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \frac{1}{2} \Rightarrow$ (۰/۲۵) سری همگرا به $\frac{1}{2}$ ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-1}{3n} = 1 \quad (0/25) \Rightarrow$ (۰/۲۵) سری واگراست. ج) سری به ۱ همگراست (۰/۲۵) $S = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 \quad (0/25) \Rightarrow q < 1 \quad (0/25) \quad a = \frac{2}{3} \quad (0/25), \quad q = \frac{1}{3} \quad (0/25)$ (سری هندسی)	۵
۶	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \exists 0 < x-1 < \delta \Rightarrow \left \frac{3x^2-3}{x-1} - 6 \right < \varepsilon \quad (0/5)$ $\left \frac{3x^2-3}{x-1} - 6 \right < \varepsilon \Rightarrow \left \frac{3x^2-6x+3}{x-1} \right < \varepsilon \quad (0/25) \Rightarrow 3 x-1 < \varepsilon \quad (0/25) \Rightarrow x-1 < \frac{\varepsilon}{3} \quad (0/25)$ کافیست $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ باشد. (۰/۲۵)	۶
۷	$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2n\pi} \\ b_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \end{cases} \quad (0/5) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \neq 0 \quad (0/25)$ $f(a_n) = \sin(2n\pi) = 0, \quad f(b_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \quad (0/25)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = 0 \quad (0/25), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = 1 \quad (0/25)$ چون دو دنباله $\{f(a_n)\}, \{f(b_n)\}$ به دو عدد نابرابر همگرايند، لذا $f(x)$ در صفر حد ندارد. (۰/۲۵)	۷

ادامه در برگه ی دوم

راهنمای تصحیح امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱)	رشته: علوم ریاضی	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان: ۱۳۹۰ / ۱۰ / ۱۰	
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در دی ماه سال تحصیلی ۱۳۹۰-۹۱	مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره

۸	<p>الف) $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) = 0$ (۰/۲۵), $\cos \frac{1}{x-3} \leq 1$ (۰/۲۵) $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \cos \frac{1}{x-3} = 0$ (۰/۲۵)</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - 2}{x - 3} = 0$ (۰/۲۵)</p> <p>ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x \sqrt{9 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x(6 - \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3x}{6x} = \frac{5}{6}$ (۰/۲۵)</p>
۹	<p>تابع f در بازه $[-1, 1]$ پیوسته است (۰/۲۵) و $f(-1) = -m + 7$ (۰/۲۵) و $f(1) = -m - 1$ (۰/۲۵). طبق قضیه ی مقدار میانی داریم:</p> <p>$\frac{f(-1) \times f(1)}{(۰/۲۵)} < 0 \Rightarrow \frac{(-m+7)(-m-1)}{(۰/۲۵)} < 0 \Rightarrow -1 < m < 7$ (۰/۲۵)</p>
۱۰	<p>$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2}{x-6} = -25$ (۰/۲۵), $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x-5} = 0$ (۰/۲۵) \Rightarrow تابع در نقطه ی 5 ناپیوسته است. (۰/۲۵)</p>
۱۱	<p>مجاانب افقی ندارد. (۰/۲۵)</p>
۱	<p>$x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow \infty \end{cases} \Rightarrow$ (۰/۲۵) $x = 1$ مجانب قائم</p> <p>$x^2 - x + 1 = x(x-1) + 1 \Rightarrow$ (۰/۲۵) $y = x$ مجانب مایل</p>
۱۲	<p>چون f و g در a مشتق پذیرند داریم:</p> <p>$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ (۰/۲۵), $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a)$ (۰/۲۵)</p> <p>$(f \cdot g)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(a)}{h}$ (۰/۲۵)</p> <p>$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times g(a+h) + f(a) \times \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \right) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ (۰/۲۵)</p>
۱۳	<p>$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = 1$ (۰/۲۵)</p> <p>تابع در $x = 1$ مشتق پذیر است. (۰/۲۵)</p>
۱۴	<p>$f'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(4) = \frac{5}{4}$ (۰/۲۵), $g'(f(4)) = g'(2) = 5$ (۰/۲۵)</p> <p>$\Rightarrow F'(4) = f'(4) \times g'(f(4)) = \frac{25}{4}$ (۰/۲۵)</p>
۲۰	همکاران گرامی، ضمن عرض خسته نباشید، به سایر راه حل های صحیح به تناسب نمره تعلق گیرد. با تشکر