

۱- با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

۲- اگر a, b, c سه عدد گنگ باشند، آیا abc^2 یک عدد گنگ است؟ چرا؟

۳- با استفاده از استدلال استنتاجی، نشان دهید مجموع سه عدد صحیح زوج متوالی مضربی از ۶ است.

۴- اگر n عددی صحیح و n^2 فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است. (برهان خلف)

۵- ۱۰۰ عدد طبیعی متمایز داریم. نشان دهید اگر این ۱۰۰ عدد را بر ۱۵ تقسیم کنیم، حداقل ۷ عدد دارای باقیمانده ی یکسانی بر ۱۵ هستند.

۶- با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید:

$$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup C') \cap (A \cup B') = A \quad \text{الف)}$$

ب) اگر $A \subset B$ آنگاه $B' \subset A'$

۷- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 4, 5\}$ باشند، عضوهای $A \times B - B^2$ را مشخص و روی محور مختصات رسم کنید.

۸- رابطه ی R روی $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ به صورت $a^3 - d^3 = c^3 - b^3 \Leftrightarrow (a, b)R(c, d)$ تعریف شده است.

الف) ثابت کنید R یک رابطه ی هم ارزی است.

ب) کلاس هم ارزی $[(2, 3)]$ را مشخص کنید.

۹- یک سکه ی سالم را ۳ بار می اندازیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه ای این تجربه ی تصادفی.

ب) پیشامد A آن که حداقل دو بار رو بیاید.

ج) پیشامد B آن که فقط ۲ بار پشت بیاید.

د) پیشامد $A \cap B'$ را مشخص کنید.

۱۰- در یک کلاس ۳۲ نفر دانش آموز در ۴ ردیف روی نیمکت نشسته اند. به طور تصادفی ۲ نفر از دانش آموزان را انتخاب می کنیم. مطلوب

است احتمال این که:

الف) هر دو از ردیف اول باشند.

ب) یکی از ردیف اول و یکی از ردیف دوم باشد.

۱۱- عددی به تصادف از فضای نمونه ای $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ انتخاب می کنیم. مطلوب است احتمال این که عدد انتخاب شده فرد یا کمتر از ۶

باشد.

۱۲- سه دانش آموز A, B, C با هم مسابقه دومیدانی می دهند. احتمال برنده شدن A و C یکسان ولی احتمال برنده شدن هر کدام سه برابر

احتمال برنده شدن B است. احتمال آن که C یا B برنده شوند چقدر است؟

۱۳- نقطه ای به تصادف داخل مربعی به ضلع ۲ در نظر می گیریم. مطلوب است احتمال این که فاصله ی این نقطه از هر رأس مربع کوچکتر از $\frac{1}{4}$

باشد.

$$P(A' \cap B')$$

۱۴- اگر $P(A) = 0/3, P(B') = 0/4, P(A \cup B) = 0/7$ باشد، مطلوب است:

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- فردادماه ۱۳۸۵

-۱

$$P(1): \frac{2}{3^1} = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{شروع استقراء صحيح}$$

$$P(K): \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^k} = 1 - \frac{1}{3^k} \quad \text{فرض استقراء}$$

$$P(K+1): \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} = 1 - \frac{1}{3^{k+1}}$$

$$\text{اثبات استقراء: } \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{2}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} = 1 - \frac{1}{3^k} + \frac{2}{3^{k+1}} = 1 + \frac{-3+2}{3^{k+1}} = 1 - \frac{1}{3^{k+1}} \quad \text{طرف چپ حکم}$$

۲- abc^2 همیشه یک عدد گنگ نیست. از مثال نقض استفاده می کنیم.

$$a = \sqrt{2} \quad b = 2\sqrt{2} \quad c = \sqrt{3}$$

$$abc^2 = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times (\sqrt{3})^2 = 12 \quad \text{عدد صحيح}$$

-۳

$$x = 2k \quad y = 2k+2 \quad z = 2k+4 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x+y+z = 2k+2k+2+2k+4 = 6k+6 = 6(k+1) = 6k' \quad k+1 \in \mathbb{Z}$$

۴- اثبات به روش برهان خلف: فرض می کنیم n عدد زوج باشد (فرض خلف)

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 \quad n^2 = 2(2k^2) \quad n^2 = 2k' \quad \text{تناقض} \quad \times$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad 2k^2 = k' \in \mathbb{Z}$$

n^2 زوج شد و این خلاف فرض است. به تناقض می رسیم. خلاف حکم نادرست پس حکم درست است.

۵- اگر هر عدد طبیعی را بر ۱۵ تقسیم کنیم، باقیمانده یکی از اعضای مجموعه r است. هر کدام از اعضای مجموعه r را یک لانه کبوتر در نظر می گیریم. اگر ۱۰۰ کبوتر بخواهند در ۱۵ لانه جا بگیرند، بنا به اصل لانه کبوتر $6+1=7$ کبوتر در یک لانه قرار می گیرند. پس حداقل ۷ عدد از این ۱۰۰ عدد طبیعی دارای باقیمانده یکسانی بر ۱۵ هستند.

$$r = \{0, 1, 2, 3, \dots, 14\} \quad \begin{array}{r} 100 \\ 90 \\ \hline 10 \end{array} \begin{array}{r} 15 \\ 6 \\ \hline \end{array}$$

الف)

-۶

$$(A \cup B \cup C) \cap (A \cup B \cup C') \cap (A \cup B') =$$

$$[(A \cup B) \cup (C \cap C')] \cap (A \cup B') = [(A \cup B) \cup \emptyset] \cap (A \cup B') =$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B') = A \cup \emptyset = A$$

ب) راه حل اول:

$$A \subset B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow (A \cap B)' = A' \Rightarrow A' \cup B' = A' \Rightarrow B' \subset A'$$

راه حل دوم:

$$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow (A \cup B)' = B' \Rightarrow A' \cap B' = B' \Rightarrow B' \subset A'$$

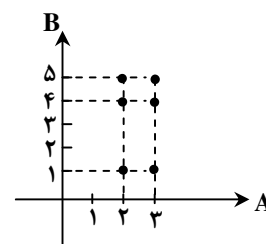
-۷

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

$$A \times B = \{(1,1), (1,4), (1,5), (2,1), (2,4), (2,5), (3,1), (3,4), (3,5), (4,1), (4,4), (4,5)\}$$

$$B^2 = B \times B = \{(x, y) | x \in B, y \in B\}$$

$$B^2 = \{(1,1), (1,4), (1,5), (4,1), (4,4), (4,5), (5,1), (5,4), (5,5)\}$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

$$A \times B - B^{\vee} = \{(2,1), (2,2), (2,5), (3,1), (3,2), (3,5)\}$$

-۸

بازتابی هست $(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow a^{\vee} - b^{\vee} = a^{\vee} - b^{\vee}$

تقارنی هست $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^{\vee} - d^{\vee} = c^{\vee} - b^{\vee} \Rightarrow c^{\vee} - b^{\vee} = a^{\vee} - d^{\vee} \Leftrightarrow (c,d)R(a,b)$

$$\left. \begin{aligned} (a,b)R(c,d) &\Leftrightarrow a^{\vee} - d^{\vee} = c^{\vee} - b^{\vee} \\ (c,d)R(e,f) &\Leftrightarrow c^{\vee} - f^{\vee} = e^{\vee} - d^{\vee} \end{aligned} \right\} +$$

$$a^{\vee} - d^{\vee} + c^{\vee} - f^{\vee} = c^{\vee} - b^{\vee} + e^{\vee} - d^{\vee}$$

تراگذاری هست $\Rightarrow a^{\vee} - f^{\vee} = e^{\vee} - b^{\vee} \Leftrightarrow (a,b)R(e,f)$

هر رابطه‌ی که بازتابی و تقارنی و تراگذاری باشد، هم ارزی است.

$$[(2,3)] = \{(x,y) | (x,y)R(2,3)\} = \{x^{\vee} - 3^{\vee} = 2^{\vee} - y^{\vee}\} = \{x^{\vee} + y^{\vee} = 3^{\vee}5\}$$

(الف-۹)

$$S = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ), (ر, ر, ر)\}$$

$$A = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (ر, پ, پ)\}$$

$$B = \{(ر, پ, پ), (ر, پ, ر), (ر, ر, پ)\}$$

$$B' = \{(پ, پ, پ), (پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (پ, ر, ر), (ر, ر, ر), (ر, ر, پ)\}$$

$$A \cap B' = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), (ر, پ, ر), (ر, پ, پ)\}$$

(الف-۱۰)

$$n_s = \binom{32}{2} = \frac{32 \times 31}{2} = 496$$

$$n_A = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$P(A) = \frac{n_A}{n_s} = \frac{28}{496} = \frac{7}{124}$$

(ب)

$$n_B = \binom{8}{1} \times \binom{8}{1} = 8 \times 8 = 64$$

$$P(B) = \frac{n_B}{n_s} = \frac{64}{496} = \frac{4}{31}$$

-۱۱

$$n_s = 10 \quad A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \quad P(A) = \frac{n_A}{n_s} = \frac{5}{10}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad P(B) = \frac{n_B}{n_s} = \frac{5}{10} \quad A \cap B = \{1, 3, 5\} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{5}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

-۱۲

$$P(A) = P(C) = 2P(B) \quad P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$2P(B) + P(B) + 2P(B) = 1 \quad 5P(B) = 1 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{5}$$

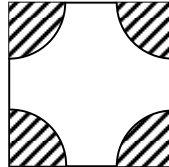
$$P(A) = P(C) = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

۱۳- مساحت ۴ قطاع با زاویه 90° برابر مساحت یک دایره است.

$$a_S = 2 \times 2 = 4$$

$$a_A = \pi R^2 = \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$



-۱۴

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$$

$$P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3$$