

جبر و احتمال

سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری - فراداد ماه ۱۳۸۷

۱- با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید اگر به مکعب عدد فردی یک واحد اضافه کنیم عدد زوجی به دست می آید.

۲- با استفاده از اصل استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n عدد $P_n = 11^n - 1$ بر عدد ۱۰ بخش پذیر است.

۳- اگر a, b دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

۴- می دانیم $\sqrt{3}$ و $\sqrt{7}$ اعدادی گنگ هستند. نشان دهید عدد $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ نیز عددی گنگ است.

۵- ورزشکار مرد در رشته های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. ثابت کنید حداقل ۵ ورزشکار هم رشته و هم شهری هستند.

۶- به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$$

۷- رابطه R روی مجموعه $\{0\} - R$ چنین تعریف شده است: $x R y \Leftrightarrow xy > 0$

الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است. ب) کلاس هم ارزی $[-2]$ را بدست آورید.

۸- مجموعه های $A = \{3^x | x \in \mathbb{N}, x \leq 2\}$ و $B = \{3^x | x \in \mathbb{Z}, |x| < 2\}$ داده شده است.

الف) مجموعه های A و B را به صورت اعضا مشخص کنید.

ب) حاصل ضرب دکارتی $B \times A$ را تشکیل دهید و نمودار آن را رسم کنید.

۹- نمودار رابطه زیر را رسم کنید.

$$R = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, |x - y| \geq 1\}$$

۱۰- دو مکعب سالم را پرتاب می کنیم، مطلوب است تعیین:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه ای ب) پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده ۸ شود.

ج) پیشامد B که در آن حاصل ضرب اعداد رو شده مضرب ۱۵ شود. د) پیشامد $A - B$

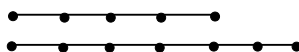
۱۱- ۵ دانش آموز در نظر می گیریم. احتمال این که روز تولد هیچ دو نفری از آنها یک روز هفته نباشد را مشخص کنید.

۱۲- چهار دونه a, b, c, d در یک مسابقه شرکت می کنند. فرض کنیم احتمال برنده شدن a سه برابر احتمال برنده شدن b و احتمال برنده شدن b نصف احتمال برنده شدن c و دونه های d, c هم شانس باشند. احتمال برنده شدن a یا d را بدست آورید.

۱۳- احتمال آن که در خانه ای یخچال باشد برابر 0.85 و احتمال آنکه هم یخچال و هم تلویزیون باشد برابر 0.4 و احتمال آن که حداقل یکی از دو وسیله یخچال و تلویزیون باشد 0.96 می باشد. احتمال آن را بیابید که در این خانه:

الف) تلویزیون باشد ب) فقط یخچال باشد

۱۴- دوازده نقطه مطابق شکل زیر روی دو خط موازی قرار دارند. از این نقطه ها سه نقطه به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال این که این سه نقطه رأس های یک مثلث باشند را بدست آورید.



۱۵- نقطه ای به تصادف درون مثلث قائم الزاویه متساوی الساقینی که طول هر ساق آن ۳ سانتی متر است انتخاب می کنیم. مطلوب است محاسبه

احتمال آن که فاصله این نقطه از هر رأس مثلث بیشتر از ۱ سانتی متر باشد.

۱۶- قضیه: ثابت کنید اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ ، آن گاه: $P(B - A) = P(B) - P(A)$

-۱

$$x = 2k + 1$$

$$x^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 1 + 1 = 2(k^2 + 2k + 1) = 2t$$

-۲

$$P(1) : P_1 = 11^1 - 1 = 10 = 10 \cdot (1) \quad P(k) : P_k = 11^k - 1 = 10 \cdot t \quad \text{فرض}$$

$$P(k+1) : P_{k+1} = 11^{k+1} - 1 = 10 \cdot t' \quad \text{حکم}$$

طرفین فرض را در عدد ۱۱ ضرب می‌کنیم.

$$11^{k+1} - 11 = 10(11t) \Rightarrow 11^{k+1} - 10 = 10t$$

$$11^{k+1} - 1 - 10 = 10(11t) \Rightarrow 11^{k+1} - 1 = 10 \underbrace{(11t + 1)}_{t'}$$

-۳

$$\frac{\sqrt{b} + \sqrt{a}}{\sqrt{ab}} \geq \frac{4}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq 4\sqrt{ab} \Rightarrow a + b + 2\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{ab} \Rightarrow a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

بدیهی - پس با استفاده از استدلال بازگشتی نامساوی برقرار است.

-۴

$$\frac{1}{\sqrt{v} + \sqrt{3}} \notin Q \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{v} + \sqrt{3}} \in Q \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{v} + \sqrt{3}} = a \Rightarrow \sqrt{v} + \sqrt{3} = \frac{1}{a}$$

$$\sqrt{v} = \frac{1}{a} - \sqrt{3} \Rightarrow v = \frac{1}{a^2} + 3 - \frac{2}{a}\sqrt{3} \Rightarrow \frac{2}{a}\sqrt{3} \text{ گنگ} = \frac{1}{a^2} - 4 \text{ گویا}$$

به تناقض رسیدیم. پس $\frac{1}{\sqrt{v} + \sqrt{3}}$ عدد گنگ است.

-۵ روش اول:

$$\begin{array}{r} 50 \quad 3 \\ 16 \quad m \end{array} \mid \overline{50}$$

$$\text{لانه (رشته‌ها)} \quad 50 = 3 \times 16 + 2 \quad n = 3$$

$$\text{حداقل هم رشته‌اند} \quad 16 + 1 = 17$$

$$\begin{array}{r} 17 \quad 4 \\ 4 \quad m \end{array} \mid \overline{17}$$

$$\text{لانه (رشته‌ها)} \quad 17 = 4 \times 4 + 1 \quad n = 4$$

$$\text{حداقل هم شهری‌اند} \quad 4 + 1 = 5$$

طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۵ نفر هم رشته و هم شهری هستند.

روش دوم:

$$m \text{ کبوتر} = 50$$

$$\text{لانه} \quad n = 3 \times 4 = 12$$

$$50 = 4 \times 12 + 2$$

$$4 + 1 = 5$$

طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۵ نفر هم رشته و هم شهری هستند.

-۶

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C')$$

$$= B \cap [(A \cap A') \cup (A \cap C')] = B \cap [\emptyset \cup (A \cap C')] = B \cap (A \cap C') = A \cap (B \cap C') = A \cap (B - C)$$

-۷

$$x R x \rightarrow xy > 0 \rightarrow x^2 > 0 \quad \text{بدیهی (بازتابی)}$$

$$x R y \rightarrow xy > 0 \Rightarrow yx > 0 \Rightarrow y R x \quad \text{(تقارنی)}$$

$$\begin{cases} x R y \\ y R z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy > 0 \\ yz > 0 \end{cases} \Rightarrow y^2(xz) > 0 \Rightarrow xz > 0 \Rightarrow x R z \quad \text{(ترایایی)}$$

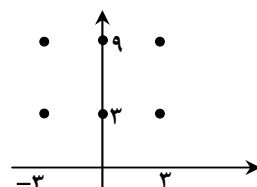
پس R هم ارزی است.

$$x R (-2) \rightarrow (-2)x > 0 \Rightarrow x < 0 \quad \text{(تمام اعداد حقیقی منفی)}$$

$$A = \{3, 9\}$$

$$B = \{-3, 0, 3\}$$

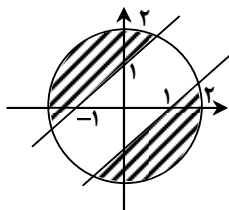
$$B \times A = \{(-3, 3), (-3, 9), (0, 3), (0, 9), (3, 3), (3, 9)\}$$



-۸

$$x - y \geq 1 \quad x - y = 1$$

$$x - y \leq -1 \quad x - y = -1$$



-۹

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

$$B = \{(3, 5), (5, 3), (5, 6), (6, 5)\} \quad A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

$$A - B = \{(2, 6), (4, 4), (6, 2)\}$$

-۱۰

$$P(A) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{7^5} = \frac{360}{2401}$$

-۱۱

$$P(a) = 3P(b) \quad P(b) = \frac{1}{2}P(c) \rightarrow P(c) = 2P(b)$$

$$P(c) = P(d) \quad P(b) = W$$

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \quad 3W + W + 2W + 2W = 1 \Rightarrow W = \frac{1}{8}$$

$$P(a) + P(d) = 3W + 2W = 5W = \frac{5}{8}$$

-۱۲

-۱۳

A : احتمال یخچال B : احتمال تلویزیون

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0.96 = 0.85 + P(B) - 0.4 \Rightarrow P(B) = 0.51$$

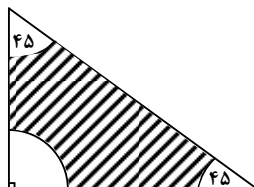
$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.85 - 0.4 = 0.45 \quad \text{فقط یخچال}$$

-۱۴

$$P(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{2} + \binom{5}{2}\binom{7}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{5 \times 21 + 10 \times 7}{220} = \frac{175}{220} = \frac{35}{44}$$

۱۵- از مساحت مثلث مساحت نیم‌دایره کم می‌شود:

$$a_s = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$



دانلود از سایت ریاضی سرا

WWW.RIAZISARA.IR

$$a_A = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{9 - \pi}{2}$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{9 - \pi}{2}}{\frac{9}{2}} = \frac{9 - \pi}{9}$$

۱۶- می‌دانیم که $B = (B - A) \cup A$ و با استفاده از شکل، مجموعه‌های A و $B - A$ از هم جدا هستند. بنابراین داریم:

$$P(B) = P(B - A) + P(A)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \text{ و از آن جا:}$$

