

۱- با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع دو عدد فرد متوالی مضرب ۴ باشد.

۲- به روش استقرای ریاضی ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: $(1 + \sqrt{7})^n \geq 1 + \sqrt{7}n$

۳- آیا حاصل ضرب دو عدد گنگ همواره گنگ است؟ چرا؟

۴- اگر n^3 مضرب ۵ باشد، نشان دهید n نیز مضرب ۵ است. (برهان خلف)

۵- ۹ نقطه درون دایره ای به شعاع واحد انتخاب می کنیم. ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از واحد دارند.

۶- با استفاده از جبر مجموعه ها ثابت کنید:

$$(A - C) - (B - C) = (A - B) - C$$

۷- x, y را چنان بیابید تا دو زوج مرتب $(2^{3x+y}, 125)$ و $(64, 5^{3y})$ مساوی باشند.

۸- اگر $A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$ و $B = \{0, 1, 2\}$ دو مجموعه باشند:

الف) مجموعه های A^2 و B^2 را به صورت اعضا بنویسید.

ب) مجموعه $B^2 - A^2$ را تشکیل دهید.

۹- رابطه R در Z^2 به صورت زیر تعریف شده است:

$$(x, y)R(z, t) \Leftrightarrow x^2 - y = z^2 - t$$

الف) ثابت کنید R یک رابطه هم ارزی است.

ب) کلاس هم ارزی $[(1, 2)]$ را تشکیل دهید.

۱۰- ارقام ۵, ۳, ۰, ۹ را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین:

الف) فضای نمونه ای S که شامل تمام اعداد دو رقمی بدون تکرار باشد.

ب) پیشامد A آن که اعداد دورقمی مضرب ۵ باشد.

ج) پیشامد B آن که اعداد دو رقمی بزرگتر از ۵۰ باشد.

د) پیشامد $A \cap B'$

۱۱- خانواده ای ۶ فرزند دارد. احتمال آن را بیابید که دو فرزند خانواده، پسر باشد.

۱۲- در فضای نمونه ای $A = \{a, b, c, d\}$ داریم: $P\{a, d\} = \frac{5}{7}$ و $P\{a, b, c\} = \frac{17}{35}$ و b و c هم شانس هستند، احتمال هر یک را بیابید.

۱۳- از میان ۵ پیچ و ۷ مهره که درون جعبه ای قرار دارند ۴ تایی آنها را به تصادف خارج کرده ایم، احتمال آن را بیابید که دو جفت پیچ و مهره داشته باشیم.

۱۴- اگر A و B دو پیشامد باشند و داشته باشیم: $P(A) = 2P(B) = 3P(A \cap B)$ ، مطلوب است محاسبه:

$$\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)}$$

۱۵- نقطه ای به تصادف درون متوازی الاضلاعی به رئوس $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $B \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $C \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ و $D \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ انتخاب می کنیم، احتمال آن را بیابید که داشته باشیم:

$$x < 1 \text{ یا } x > 3/5$$

۱۶- برای دو پیشامد A, B از فضای نمونه ای S ثابت کنید:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- شهریور ماه ۱۳۸۷

$$x = 2k + 1 \quad y = 2k + 3 \quad x + y = 2K + 1 + 2K + 3 = 4K + 4 = 4(K + 1) = 4t$$

-۲

به ازای $n = 1$ برقرار است:

$$P(1) : (1 + \sqrt{v})^1 \geq 1 + \sqrt{v}(1) \Rightarrow 1 + \sqrt{v} \geq 1 + \sqrt{v}$$

فرض می کنیم به ازای $n = k$ برقرار باشد. باید ثابت کنیم به ازای $n = k + 1$ نیز برقرار است:

$$P(K) : (1 + \sqrt{v})^K \geq 1 + \sqrt{v}K$$

$$P(K + 1) : (1 + \sqrt{v})^{K+1} \geq 1 + \sqrt{v}(K + 1)$$

$$(1 + \sqrt{v})^{K+1} \geq (1 + \sqrt{v}K)(1 + \sqrt{v}) \Rightarrow (1 + \sqrt{v})^{K+1} \geq 1 + \sqrt{v}(k + 1) + vk$$

بدیهی است که $vk > 0$ ، بنابراین: $P(K + 1)$ برقرار است: $(1 + \sqrt{v})^{K+1} \geq 1 + \sqrt{v}(K + 1)$

۳- خیر. ضرب دو عدد ممکن است گویا شود.

$$\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 10$$

۴- فرض می کنیم n ، مضرب ۵ نیست:

$$n = 5k + r, r \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow n^2 = 125k^2 + 10kr + r^2, r^2 \in \{1, 4, 9, 16\}$$

$$\Rightarrow n^2 = 5(\underbrace{k^2 + 2kr}_{k'}) + r^2 = 5k' + r^2$$

هیچ یک از اعداد ۱، ۴، ۹ و ۱۶ مضرب ۵ نیست، پس n^2 مضربی از ۵ نیست.

۵- دایره را به هشت قطاع مساوی قسمت می کنیم.

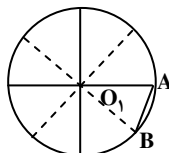
$$\hat{O}_1 = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{180 - 45}{2} = 67.5^\circ \Rightarrow \hat{A} > \hat{O}_1 \Rightarrow \text{بزرگ تر است از ضلع روبرو به زاویه کوچک تر}$$

لانه $n = 8$

$m = 9$ کبوتر

$9 > 8$



بنابر اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه قرار می گیرند که فاصله آنها از $O_1 = 1$ کمتر است.

-۶

$$(A - C) - (B - C) = (A \cap C') - (B \cap C') = (A \cap C') \cap (B \cap C')' = (A \cap C') \cap (B' \cup C) = A \cap (C' \cap (B' \cup C))$$

$$= A \cap ((C' \cap B') \cup (C' \cap C)) = A \cap (C' \cap B') = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$$

۷- دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) در صورتی برابرند که $a = c$ و $b = d$ باشد.

$$\begin{cases} 2^{2x+y} = 64 \\ 5^{2y} = 125 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x+y} = 2^6 \\ 5^{2y} = 5^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=6 \\ 2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=6 \\ y=1.5 \end{cases} \Rightarrow 2x+1.5=6 \Rightarrow x=2.25$$

-۸

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-4) = 0 \Rightarrow x=1, x=4 \quad A = \{1, 4\}$$

$$A^2 = \{(1,1), (1,4), (4,1), (4,4)\}$$

$$B^2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

$$B^2 - A^2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

۹- R در صورتی که رابطه هم ارزی است که سه ویژگی بازتابی، تقارنی و تراگذری را داشته باشد.

بازتابی: $(x, y) R(x, y) \Rightarrow x^2 - y = x^2 - y$

تقارنی: $(x, y) R(z, t) \Rightarrow x^2 - y = z^2 - t = x^2 - y \rightarrow (z, t) R(x, y)$

تراگذری: $(x, y) R(z, t) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y = z^2 - t \\ z^2 - t = e^2 - f \end{cases} \Rightarrow x^2 - y = e^2 - f \rightarrow (x, y) R(e, f)$

پس R یک رابطه هم ارزی است. $(x, y) R(1, 2) \rightarrow x^2 - y = 1^2 - 2 \rightarrow y = x^2 + 1$

۱۰- الف)

$$S = \{30, 35, 39, 50, 53, 59, 90, 93, 95\}$$

ب) اعدادی که به صفر یا ۵ ختم می شوند، مضرب ۵ هستند.

$$A = \{30, 35, 50, 90, 95\}$$

ج)

$$B = \{53, 59, 90, 93, 95\}$$

د) ابتدا B' را مشخص می کنیم.

$$B' = \{30, 35, 39, 50\}$$

$$A \cap B' = \{30, 35, 50\}$$

۱۱-

پسر بودن $P(A) = \frac{\binom{6}{2}}{3^6} = \frac{15}{64} \quad P = \frac{1}{2}$

۱۲-

$$\begin{cases} P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \\ P(a) + P(b) + P(c) = \frac{17}{35} \end{cases} \Rightarrow \frac{17}{35} + P(d) = 1 \Rightarrow P(d) = 1 - \frac{17}{35} = \frac{18}{35}$$

$$P(a) + P(d) = \frac{5}{7} \Rightarrow P(a) = \frac{5}{7} - \frac{18}{35} = \frac{7}{35} = \frac{1}{5}$$

$$P(a) + P(b) + P(c) = \frac{17}{35}, P(b) = P(c) \Rightarrow \frac{1}{5} + 2P(b) = \frac{17}{35} \Rightarrow P(b) = \frac{1}{7}, P(c) = \frac{1}{7}$$

۱۳- جعبه دارای ۱۲ = ۵ + ۷ پیچ و مهره است که ۴ عدد خارج کرده ایم. بنابراین تعداد عضوهای فضای نمونه ای برابر است با: $\binom{12}{4}$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} \binom{7}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{10 \times 21}{495} = \frac{14}{33}$$

۱۴- ابتدا P(A) و P(B) را بر حسب P(A ∩ B) بدست می آوریم.

$$P(A) = 2P(A \cap B), P(B) = \frac{3}{2}P(A \cap B)$$

$$\frac{P(A \cup B)}{P(A \cap B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{2P(A \cap B) + \frac{3}{2}P(A \cap B) - P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{5}{2}P(A \cap B)}{P(A \cap B)} = \frac{5}{2}$$

-۱۵

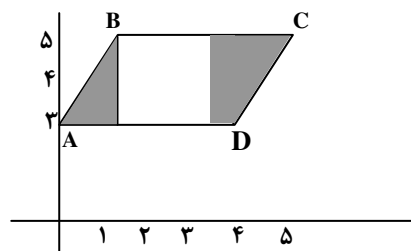
$$x > 3/5 \text{ یا } x < 1$$

$$a_s = \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = 4(5-3) = 8$$

$$\text{مساحت مستطیل سفید} = \text{عرض} \times \text{طول} = (3/5 - 1) \times 2 = 5$$

$$a_A = (x > 3/5 \text{ یا } x < 1) \text{ مساحت ناحیه سایه زده شده} = 8 - 5 = 3$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_s} = \frac{3}{8}$$



-۱۶

دو پیشامد $A \cap B'$ ، $A \cap B$ جدا از هم هستند $\Rightarrow (A \cap B') \cap (A \cap B) = A \cap (B' \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset$

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A$$

$$P[(A \cap B') \cup (A \cap B)] = P(A \cap B') + P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$