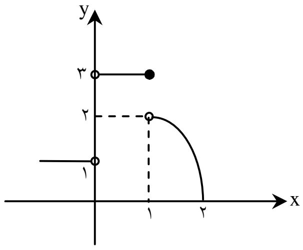
۱- اگر $A=\{x|x\in R,-۱\le x<۳\}$ و $B=\{x|x\in R,x\le ۲\}$ باشد، حاصل $(A\bigcap B)\bigcup C$ را به‌صورت بازه نوشته و بر روی محور نمایش دهید.

۲- اگر $f(x)=ax^۲+bx+c$ باشد، c,b,a را طوری بیابید که سهمی محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۳ و محور xها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع کند و ازنقطه‌ی $A(۲,۳)$ نیز بگذرد.

۳- دامنه‌ی تابع روبه‌رو را تعیین کرده و به‌صورت بازه نمایش دهید. $f(x)=\log(۴-x^۲)$

۴- اگر $f(x)=۲x+۵$ و $g(x)=۹x+۷$ باشد، حاصل $(fog)(x)-(gof)(x)$ را محاسبه کنید.

۵- با توجه به نمودار تابع f حدهای زیر را حساب کنید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ ج) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$

۶- آیا تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{۳x-x}{x} & x<۱ \\ x^۲+۱ & x>۱ \end{cases}$ در $x=۱$ حد دارد؟ چرا؟

۷- حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{۵x^۲+x-۶}{۹x^۲+۳x-۱۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲-۴}{۳-\sqrt{x+۷}}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{۱-\cos ۲x}{۲x^۲}$ د) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{x^۲+۱}}{x-۱}$ هـ) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x+۱}{۹-x^۲}$

۸- اگر به ازای هر x داشته باشیم $۳-۵x^۲\le g(x)\le ۳\cos x$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ را محاسبه کنید.

۹- مقادیر a , b را چنان بیابید که تابع $f(x)=\begin{cases} ۳-۲ax^۲ & x<-۱ \\ x+۱ & x=-۱ \\ b[x]+۱ & x>-۱ \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-۱$ پیوسته باشد.

۱۰- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه‌ی $x=۹$ بدست آورید.

۱۱- مشتق توابع زیر را بدست آورید: (ساده کردن مشتق لازم نیست)

الف) $f(x)=\dfrac{x-۱}{x(x+۱)}$ ب) $g(x)=\sin ۳x+\cos^۲ x^۲$ ج) $h(x)=(۲x^۳-۳x+۷)^۴$

۱۲- معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=x^۴-۴x^۳$ را در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ واقع بر آن بنویسید.

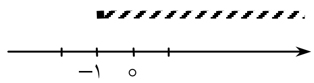
۱۳- مقادیر a , b را طوری بیابید که نقطه $A(-۱,-۱)$ نقطه‌ی عطف تابع $f(x)=x^۳-ax^۲+۳x+b$ باشد.

۱۴- جهت تغییرات و نمودار تابع $y=x^۳-۳x^۲+۱$ را رسم کنید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری- خردادماه ۱۳۸۴

۱-

$$A\cap B=[-۱,۳)\cap(-\infty,۲]=[-۱,۲]$$
$$(A\cap B)\cup C=[-۱,۲]\cup[۰,+\infty)=[-۱,+\infty)$$



۲-

$(۰,۳)\in$ سهمی $\to ۳=a\times(۰)^۲+b\times(۰)+c\to c=۳$

$(۱,۰)\in$ سهمی $\to ۰=a\times(۱)^۲+b\times(۱)+c$

$(۲,۳)\in$ سهمی $\to ۳=a\times(۲)^۲+b\times(۲)+c$

$$\begin{cases}a+b=-۳\\ ۲a+b=۰\end{cases}\to a=۳\ ,\ b=-۶$$

۳-

$$۴-x^۲\neq ۰\Rightarrow x^۲\neq ۴\Rightarrow x\neq ۲\ ,\ -۲$$
$$۴-x^۲>۰\qquad D_f=(-۲,۲)$$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
$۴-x^۲$		−	۰	+	۰	−	

۴-

$$f(g(x))-g(f(x))=۲(۹x+۷)+۵-[۹(۲x+۵)+۷]=۱۹-۵۲=-۳۳$$

۵- ج) بدلیل متفاوت بودن حد چپ و راست، حد ندارد   ب) ۲   ۳

الف)

۶- تابع f در $x=۱$ حد دارد $\Rightarrow$ حد راست $=$ حد چپ

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^-}f(x)=\dfrac{۳(۱)-۱}{۱}=۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^+}f(x)=۱^۲+۱=۲\end{array}\right\}\Rightarrow$$

۷-

الف) $$\lim_{x\to ۱}\frac{۵x^۲+x-۶}{۹x^۲+۳x-۱۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(۵x+۶)}{۳(x-۱)(۳x+۴)}=\frac{۵+۶}{۳(۳+۴)}=\frac{۱۱}{۲۱}$$

ب) $$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{۳-\sqrt{x+۷}}=\frac{۰}{۰}\ \text{مبهم}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲-۴)(۳+\sqrt{x+۷})}{(۳-\sqrt{x+۷})(۳+\sqrt{x+۷})}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x^۲-۴)(۳+\sqrt{x+۷})}{۹-x-۷}$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x+۲)(۳+\sqrt{x+۷})}{۲-x}=-(۲+۲)(۳+۳)=-۲۴$$

ج) $$\lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲x}{۲x^۲}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^۲=۱$$

د) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^۲(۱+\frac{۱}{x^۲})}}{x(۱-\frac{۱}{x})} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{(۱+\frac{۱}{x^۲})}}{x(۱-\frac{۱}{x})} = \frac{-x}{x} = -۱$

هـ) $\frac{۳+۱}{۹-۹^+} = \frac{۴}{۰^-} = -\infty$

۸-

طبق قضیه فشردگی

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to ۰}(۳-۵x^۲) = ۳ \\ &\lim_{x\to ۰}(۳\mathrm{Cos}\, x) = ۳ \end{aligned}\right\} \longrightarrow \lim_{x\to ۰} g(x) = ۳$$

۹-

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to -۱^-} f(x) = \lim_{x\to -۱^-} ۳-۲a(-۱)^۲ = ۳-۲a \\ &\lim_{x\to -۱^+} f(x) = \lim_{x\to -۱^+} b[x]+۱ = b(-۱)+۱ = -b+۱ \\ &f(-۱) = -۱+۱ = ۰ \end{aligned}\right\} \to \begin{cases} ۳-۲a = ۰ \to a = \frac{۳}{۲} \\ -b+۱ = ۰ \to b = ۱ \end{cases}$$

۱۰-

$$f'(۹) = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{f(۹+\Delta x)-f(۹)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\sqrt{۹+\Delta x}-۳}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{(\sqrt{۹+\Delta x}-۳)(\sqrt{۹+\Delta x}+۳)}{\Delta x(\sqrt{۹+\Delta x}+۳)}$$

$$= \lim_{\Delta x\to ۰} \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{۹+\Delta x}+۳)} = \frac{۱}{۶}$$

یا از راه:

$$f'(x) = \lim_{x\to x_۰} \frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰} = \lim_{x\to ۹} \frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹} = \lim_{x\to ۹} \frac{\cancel{\sqrt{x}-۳}}{\cancel{(\sqrt{x}-۳)}(\sqrt{x}+۳)} = \lim_{x\to ۹} \frac{۱}{\sqrt{x}+۳} = \frac{۱}{۶}$$

۱۱-

الف) $f'(x) = \frac{x(x+۱)-[(x+۱)+x](x-۱)}{[x(x+۱)]^۲} = \frac{(x^۲+x)-(۲x^۲-x-۱)}{(x^۲+x)^۲} = \frac{-x^۲+۲x+۱}{(x^۲+x)^۲}$

ب) $g'(x) = ۳\cos ۳x - ۴x\mathrm{Sin}\, x^۲ \mathrm{Cos}\, x^۲$

ج) $h'(x) = ۴(۶x^۲-۳)(۲x^۳-۳x+۷)^۳$

۱۲-

$x = -۱ \Rightarrow y = ۵$

$f'(x) = ۴x^۳ - ۱۲x^۲ \Rightarrow m = f'(-۱) = -۱۶ \Rightarrow m.m' = -۱ \to m' = \frac{۱}{۱۶}$

$y - y_۱ = m'(x - x_۱)$

$y - ۵ = \frac{۱}{۱۶}(x+۱) \Rightarrow y = \frac{۱}{۱۶}x + \frac{۸۱}{۱۶}$

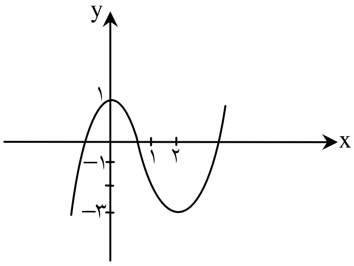
۱۳- $A\left|\begin{matrix}-۱\\-۱\end{matrix}\right. \in$ نمـــودار تـــابع $\Rightarrow -۱ = (-۱)^۳ - a(-۱)^۲ + ۳(-۱) + b \Rightarrow b - a = +۳$

$y' = ۳x^۲ - ۲ax + ۳ \Rightarrow y'' = ۶x - ۲a \Rightarrow y'' = ۰$

$۰ = ۶(-۱) - ۲a \Rightarrow ۲a = -۶ \Rightarrow a = -۳$

$b - a = ۳ \Rightarrow b - (-۳) \Rightarrow b = ۰$

۱۴-



$$y' = ۳x^۲ - ۶x \rightarrow ۳x(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۲ \end{cases}$$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y′		+	۰		−		۰		+
y	$-\infty$	↗		↘		↘		↗	$+\infty$