

۱- مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل را به صورت فاصله نوشته و روی محور نمایش دهید.

$$-3 < \frac{3x+1}{2} < 2$$

۲- دو تابع $y = x^2 + ax - 3x$ و $y = -x + b$ داده شده اند. a , b را محاسبه کنید. به طوری که نمودارهای این دو تابع روی محور x ها در نقطه ای به طول ۱ همدیگر را قطع کنند.

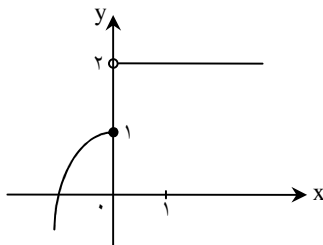
$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}$$

۳- دامنه ی تابع مقابل را تعیین کرده و آن را به صورت فاصله نمایش دهید

$$۴- \text{تابع } f(x) = \frac{1}{2x} \text{ مفروض است:}$$

الف) $f \circ f(x)$ را بیابید. ب) مقدار $f(f(\frac{1}{x}))$ را بدست آورید.

۵- با توجه به نمودار تابع f ، حاصل هریک از حدود زیر را بیابید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

۶- a , b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} a[x] + 1, & x < 2 \\ -bx - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ را در نقطه ی $x = 2$ دارای حدی برابر صفر باشد.

۷- حدود زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+2x-8}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

ج) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 - \sqrt{x+1}}{2x^2 + 5x}$

د) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+3}{(x-2)^2}$

هـ) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \cot^2 x$

و) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x-x^2}$

۸- a را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}$ باشد.

۹- پیوستگی تابع زیر را در نقطه ی $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x^2 - 20}{x^2 - 4}, & x < 2 \\ 2x + 2, & x > 2 \\ 6, & x = 2 \end{cases}$$

۱۰- آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = x^2 - 1$ را به ازای $x = 3$ و $\Delta x = 0.5$ بدست آورید.

۱۱- مشتق توابع زیر را بدست آورید: (ساده کردن مشتق لازم نیست)

الف) $f(x) = \sqrt{6x^2 - x - 4}$ ب) $g(x) = 2 \sin^3 x + \cos x^2$ ج) $h(x) = (\frac{2}{x} + \sqrt{x})^3$

۱۲- معادله ی خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 - x$ را در نقطه ی $p(2, 2)$ بدست آورید.

۱۳- تابع $y = x^3 + ax + b$ مفروض است. a , b را چنان بیابید که تابع در نقطه‌ای به طول ۱ دارای مینیمم یا ماکزیمم برابر ۲ باشد.

۱۴- جهت تغییرات و نمودار تابع $y = x(x-3)^2$ را رسم کنید.

پاسخ سؤالات امتحانی هماهنگ کشوری - شهریور ماه ۱۳۸۴

-۱

$$-3 < \frac{3x+1}{2} < 2 \Rightarrow -6 < 3x+1 < 4 \Rightarrow -7 < 3x < 3 \Rightarrow -\frac{7}{3} < x < 1 \Rightarrow \left(-\frac{7}{3}, 1\right)$$

-۲

$$(1, 0) \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + ax - 3b \\ y = -x + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 1 + a - 3b \\ 0 = -1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a - 3 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

-۳

$$\frac{x-1}{3-x} \geq 0 \quad \begin{aligned} x-1=0 &\Rightarrow x=1 \\ 3-x=0 &\Rightarrow x=3 \end{aligned}$$

$$D_f = [1, 3)$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$3-x$	+	+	0	-
$\frac{x-1}{3-x}$	-	0	+	-

-۴

$$\text{الف) } f(f(x)) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{x}\right)} = x$$

$$\text{ب) } f\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

$$\text{ج) } f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}$$

-۵

الف)۲

ب)۱

بخاطر متفاوت بودن حد چپ و راست، وجود ندارد ج)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} a[x] + 1 = a(1) + a \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -b(2) - 2 \Rightarrow -2b - 2 = 0 \Rightarrow b = -1$$

-۶

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 2x - 8} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{6} \quad \text{رفع ابهام می کنیم}$$

-۷

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2} \quad \text{رفع ابهام می کنیم}$$

$$\text{د) } \frac{-2+3}{(2-2)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\text{ه) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \cot g^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

$$\text{و) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-x} = \frac{2}{+\infty} = 0 \quad \text{رفع ابهام می کنیم}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \times \frac{1}{x+a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{2a} \Rightarrow \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2 \quad -8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \quad \text{شرط پیوستگی} \quad -9$$

$$f(2) = 6 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x + 2) = 2 \times 2 + 2 = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 + 3x^2 - 20}{x^2 - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x^2 + 5x + 10)}{(x-2)(x+2)} = \frac{24}{4} = 6$$

پس تابع در $x = 2$ پیوسته است.

$$f(x) = x^3 - 1 \quad -10$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(3/5) - f(2)}{1/5} = \frac{11/125 - 7}{1/5} = 6/5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad g'(x) = 6 \cos x \sin^2 x - 2x \sin x \quad h'(x) = 3(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}})(\frac{2}{x} + \sqrt{x}) \quad -11$$

$$y = x^2 - x \quad f'(x) = 2x - 1 \Rightarrow m = f'(2) = 2(2) - 1 = 3 \quad y - 2 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 4 \quad -12$$

$$(1, -2) \Rightarrow y = x^2 + ax + b \Rightarrow -2 = 1 + a + b \Rightarrow a + b = -3$$

$$y' = 2x + a \Rightarrow 0 = 2(1) + a \Rightarrow a = -2, b = -1 \quad -13$$

$$y = x(x-3)^2 \quad -14$$

$$y' = 1(x-3)^2 + 2(x-3)(x)$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	\nearrow	4	\searrow	0	\nearrow	$+\infty$

