

۱- اگر $A = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 < x < 1\}$ و $B = \{x | x \in \mathbb{R}, x < 2\}$ و $C = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq -1\}$ باشد، حاصل $(A \cap B) \cup C$ را بصورت بازه بنویسید.

۲- اگر $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، a, b, c را طوری بیابید که سهمی، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور عرضها را در نقطه‌ی ۱- قطع کند و از نقطه $(3, 1)$ بگذرد.

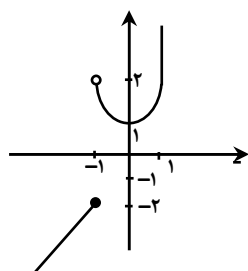
۳- دامنه تابع مقابل را تعیین کرده و آنرا بصورت فاصله بنویسید.

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}}$$

(ب) محاسبه $(f \circ g)(x)$

۴- اگر $f(x) = x^2 - 3$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشند، مطلوبست: الف) محاسبه $(f - 2g)(3)$

۵- شکل مقابل نمودار تابع f است. حاصل هر یک از عبارتهای زیر را بنویسید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

د) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

۶- حد توابع زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2-x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 5x - 6}{(\Delta x + 7)^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2}{x^2 - 4}$

د) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{2 \sin x}$

هـ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^2 - 1}$

۷- اگر به ازای هر x در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ داشته باشیم $3 - \cos^2 x \leq f(x) \leq 2 + x^2$ مطلوبست محاسبه: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

۸- در تابع $f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + bx + 1 & x < 1 \\ |x| & x = 1 \\ a \sin(x-1) + 2b & x > 1 \end{cases}$ ضرایب a و b را چنان بیابید که تابع در $x = 1$ پیوسته باشد.

۹- تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 3x + 2}$ در چه فاصله‌ای پیوسته است؟

۱۰- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ را در نقطه‌ی $x = 0$ بدست آورید.

۱۱- مشتق تابعهای زیر را بدست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

الف) $f(x) = \left(\frac{2x+1}{3x+2} \right)^2$

ب) $g(x) = \tan(2x^2 + 1) \sin x$

ج) $h(x) = 3 + \sqrt{x^2 + 3}$

۱۲- معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 2}$ را در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر منحنی این تابع بدست آورید.

۱۳- تابع $y = x^3 + ax^2 + b$ مفروض است. ضرایب a و b را چنان بیابید که $A(-1, 0)$ نقطه عطف منحنی باشد.

۱۴- جهت تغییرات و نمودار $y = (x-2)^3 + 1$ را رسم کنید.

-۱

$$A = (-2, 1), \quad B = (-\infty, 4), \quad C = [-1, +\infty)$$

$$A \cap B = (-2, -1) \cap (-\infty, 4) = (-2, 1)$$

$$A \cap B \cup C = (-2, 1) \cup [-1, +\infty) = (-2, +\infty)$$

-۲

$$(2, 0) \in \text{سهمی} \Rightarrow 0 = 4a + 2b + c$$

$$(0, -1) \in \text{سهمی} \Rightarrow -1 = c \quad \begin{cases} 4a + 2b = 2 \\ 4a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{6}, b = +\frac{1}{6}$$

$$(2, 1) \in \text{سهمی} \Rightarrow 1 = 4a + 2b - 1$$

-۳

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq -2 \quad D_f = \{x | x \geq -2\} - \{0\} \Rightarrow D_f = [-2, 0) \cup (0, +\infty)$$

-۴

$$\text{الف} \quad f(3) = 6, \quad g(3) = 2 \Rightarrow (f - 2g)(3) = 6 - 4 = 2$$

$$\text{ب} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x+1})^2 - 3$$

(د) حد ندارد.

(ج) ۱

(ب) -۲

-۵ الف (۲)

-۶

$$\text{الف} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(2-x)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(2-x)(\sqrt{x+2}+2)} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{ب} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{2\Delta x^2} = \frac{3}{2\Delta}$$

$$\text{ج} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-\Delta x^2}{x^2 - 4} = \begin{cases} x \rightarrow 2^+ \Rightarrow \frac{-2^+}{0^+} = -\infty \\ x \rightarrow 2^- \Rightarrow \frac{-2^-}{0^-} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{د} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2} = 0$$

$$\text{ه} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+2}{x-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3 - \cos^2 x) = 3 - 1 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (2 + x^2) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

-۷ طبق قضیه فشردگی داریم:

-۸

$$\text{شرط پیوستگی} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a \sin(x-1) + 2b) = 2b$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax^2 + bx + 1) = 2a + b + 1 \\ f(1) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2b = 2a + b + 1 = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}, \quad 2a = \frac{-1}{2} \rightarrow a = \frac{-1}{4}$$

-۹

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \quad \text{یا } R - \{1, 2\} \quad \text{فاصله پیوستگی: } (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

-۱۰

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x - 1}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(x+1)} = -1$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{یا از راه}$$

-۱۱

$$\text{الف) } f'(x) = 2\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right) \left[\frac{2(2x+2) - 2(2x+1)}{(2x+2)^2} \right]$$

$$\text{ب) } g'(x) = 2x \left(1 + \tan^2(2x^2 + 1) \right) \sin x + \tan(2x^2 + 1) \cos x$$

$$\text{ج) } h'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}}$$

-۱۲

$$x=2 \Rightarrow y=2 \quad A(2,2) \quad f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+2}} \Rightarrow m_A = \frac{3}{4}$$

$$y-2 = \frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \quad \text{معادله مماس}$$

-۱۳

$$y' = 2x^2 + 2ax \quad y'' = 4x + 2a$$

$$A(-1,0) \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2(-1)^2 + 2a(-1) \Rightarrow -2 + 2a = 0 \rightarrow a = 1 \\ 0 = (-1)^3 + a(-1)^2 + b \Rightarrow -1 + a + b = 0 \rightarrow -1 + 1 + b = 0 \rightarrow b = 0 \end{cases}$$

-۱۴

$$y' = 2(x-2)^2 = 0 \rightarrow x=2, y=1$$

$$y'' = 4(x-2) = 0 \rightarrow x=2, y=1 \quad \text{نقطه عطف}$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	\nearrow	\circ	\nearrow	$+\infty$

